

تحلیل ارتعاشات و بهینه‌سازی تنش دینامیکی در تیرهای جدار نازک با
مقطع متغیرمحمدرضا احسانی^{فر}، حامد درویش گوهری^{ب*}، مهدی زارع مهرجردی^پ^ا ایران، اردکان، بلوار آیت‌الله خاتمی(ره)، دانشگاه اردکان، دانشکده فنی و مهندسی، ۸۹۵۱۸-۹۵۴۹۱، دانشجوی کارشناسی ارشد^ب ایران، اردکان، بلوار آیت‌الله خاتمی(ره)، دانشگاه اردکان، ۸۹۵۱۸-۹۵۴۹۱، استادیار.^پ ایران، اردکان، بلوار آیت‌الله خاتمی(ره)، دانشگاه اردکان، ۸۹۵۱۸-۹۵۴۹۱، دانشیار.*پست الکترونیکی نویسنده مسئول: hdarvishgohari@ardakan.ac.ir

چکیده

با توجه به روند روبه‌گسترش طراحی سازه‌های سبک، مستحکم و کارآمد در صنایع پیشرفته‌ای همچون هوافضا، انرژی‌های تجدیدپذیر و خودروسازی، تحلیل دقیق رفتار دینامیکی سازه‌هایی نظیر تیرهای جدار نازک با مقطع متغیر از اهمیت بالایی برخوردار است. در این پژوهش، تحلیل ارتعاشات و تنش‌های دینامیکی تیرهای جدار نازک با سطح مقطع متغیر به روش رایلی-ریتز انجام گرفته است. به‌منظور مدل‌سازی دقیق‌تر تغییرات هندسی در راستای طول تیر، توابع چندجمله‌ای برای توزیع ضخامت و قطر مورد استفاده قرار گرفته‌اند. با بهره‌گیری از روش رایلی-ریتز، ماتریس‌های جرمی و سختی به‌صورت نیمه‌تحلیلی استخراج و معادلات حاکم بر ارتعاشات آزاد و اجباری به دست آمده‌اند. در ادامه، پاسخ دینامیکی تیر تحت بار گسترده سینوسی محاسبه و توزیع تنش خمشی در طول تیر مورد ارزیابی قرار گرفته است. به‌منظور دستیابی به طراحی بهینه، هندسه تیر با هدف کاهش هم‌زمان تنش بیشینه و جرم سازه، به کمک الگوریتم ژنتیک چندهدفه‌ی NSGA-II بهینه‌سازی شده است. مجموعه‌ای از طرح‌های بهینه روی جبهه پارتو استخراج و تحلیل شده‌اند. نتایج حاصل نشان می‌دهد که انتخاب مناسب تابع تغییرات ضخامت و قطر، با استفاده از روش بهینه‌سازی چندهدفه، می‌تواند ضمن کاهش قابل‌توجه تنش‌های دینامیکی، وزن سازه را نیز به‌طور مؤثری کاهش دهد. همچنین، مقایسه پاسخ‌های عددی با نتایج نرم‌افزار ABAQUS تطابق بسیار مطلوبی را نشان می‌دهد که مؤید دقت و کارایی مدل پیشنهادی است. روش ارائه‌شده می‌تواند به‌عنوان ابزاری کارآمد در طراحی و بهینه‌سازی سازه‌های سبک و مقاوم در کاربردهای مهندسی، به‌ویژه در صنایع هوافضا، انرژی و خودروسازی مورد استفاده قرار گیرد.

کلمات کلیدی: تیر جدار نازک؛ سطح مقطع متغیر؛ روش رایلی-ریتز؛ الگوریتم ژنتیک NSGA-II.

۱- مقدمه

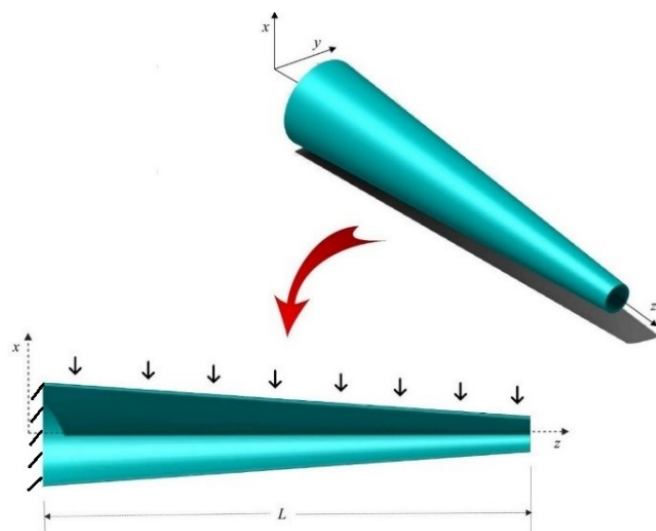
تیرهای جدار نازک با مقطع متغیر به دلیل نسبت بالای استحکام به وزن، نقش مهمی در طراحی سازه‌های سبک و مقاوم در صنایع هوافضا، خودروسازی و انرژی‌های تجدیدپذیر دارند. این تیرها در کاربردهایی نظیر پره و پایه‌ی توربین‌های بادی یا اجزای سازه‌ای هواپیما، تحت بارهای دینامیکی و ارتعاشی شدید قرار می‌گیرند؛ از این رو تحلیل دقیق رفتار ارتعاشی و تنش‌های دینامیکی آن‌ها برای بهینه‌سازی عملکرد و افزایش دوام سازه ضروری است. در این پژوهش، تحلیل ارتعاشات آزاد و تنش‌های دینامیکی تیرهای جدار نازک مخروطی‌شکل با روش انرژی‌محور رایلی-ریتز انجام شد. این روش با انتخاب توابع پایه مناسب، شرایط مرزی پیچیده و تغییرات هندسی پیوسته را دقیق مدل‌سازی می‌کند و فرکانس‌های طبیعی و مدهای ارتعاشی را با سرعت بالا استخراج می‌کند. صحت نتایج با شبیه‌سازی تیر در نرم‌افزار ABAQUS تأیید شد. یافته‌ها نشان می‌دهد کاربرد این روش در طراحی اجزای صنعتی مانند پره‌ها و پایه‌های توربین‌های بادی می‌تواند تنش‌های دینامیکی را کاهش داده و عمر سازه را افزایش دهد.

پره‌ها و پایه‌های توربین‌های بادی به دلیل قرار گرفتن در معرض بارهای دینامیکی نوسانی، نیازمند تحلیل‌های ارتعاشی دقیق برای افزایش دوام و کاهش تنش‌های مکانیکی هستند. در این زمینه، بنرجی و ویلیامز [۲] با توسعه‌ی مدل کوپل‌شده‌ی تیر تیموشنکو، اثرات هم‌زمان ارتعاشات خمشی و پیچشی را بررسی کردند. آیدق‌دو و همکاران [۳] با بهره‌گیری از روش اجزای محدود نشان دادند که تغییرات ضخامت و هندسه مقطع تأثیر چشمگیری بر فرکانس‌های طبیعی و پاسخ دینامیکی تیر دارد. آمبروزینی و دی‌بوربون [۴] اثر بار محوری را بر رفتار ارتعاشی تیرهای جدار نازک تحلیل کرده و نشان دادند که افزایش بار محوری سبب تغییر قابل توجه در فرکانس‌های طبیعی می‌شود. لی و همکاران [۵] و پراکیچ و لوکیچ [۶] نیز تأکید کردند که کوپل‌شدن ارتعاشات خمشی و پیچشی تحت بار محوری، منجر به کاهش فرکانس‌ها و افزایش پیچش تیر می‌شود. ایرانی و سازش [۷] ارتعاشات تصادفی تیرهای مخروطی را تحت تحریک‌های تصادفی بررسی کرده و نشان دادند که تیرهای با مقطع متغیر نسبت به تحریک‌های تصادفی حساسیت بیشتری دارند. در ادامه، شیائوبین و همکاران [۸] مدل دقیق ماتریس سختی دینامیکی برای سیستم‌های دوتایی ارائه کردند. در پژوهش سلطانی و آهنیان [۹]، ارتعاشات آزاد و پایداری خمشی-پیچشی تیرهای FGM با مقطع مخروطی بررسی شد و مشخص گردید که تغییرات مقطع، توزیع مواد و شرایط مرزی نقش تعیین‌کننده‌ای در پایداری دارند. الکائمالله و همکاران [۱۱] مدلی عددی بر پایه سینماتیک ولاسوف ارائه کردند که توانایی بالایی در پیش‌بینی رفتار غیرخطی تیرهای مرکب جدار نازک با مقطع متغیر دارد. همچنین، بورلون و فایلا [۱۲] با استفاده از تئوری اویلر-برنولی، دینامیک سه‌گانه‌ی خمش-پیچش را در تیرهای نامتقارن تحلیل کردند. در پژوهش جدید غنبری و عادل‌خوانی [۱۳]، روش نقطه‌ای کالوکیشن برای تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای دوار با مقطع متغیر معرفی شد و نشان داده شد که افزایش سرعت چرخش موجب افزایش فرکانس‌های طبیعی می‌گردد. در زمینه‌ی روش‌های تحلیلی، جیا و استوارت [۱۴] جنبه‌های نظری روش رایلی-ریتز را برای مسائل مقادیر ویژه بررسی کردند و کارایی آن را در تقریب زیرفضاهای ویژه تأیید نمودند. پرادان و چاکراورتنی [۱۵، ۱۶] با استفاده از روش رایلی-ریتز، رفتار ارتعاشی تیرهای FGM را بر پایه تئوری‌های اویلر-برنولی و تیموشنکو بررسی کرده و نشان دادند که انتخاب تئوری تغییر شکل برشی متناسب با نسبت ضخامت تیر، تأثیر مستقیمی بر دقت نتایج دارد.

۲- روش تحقیق

۲-۱- تشریح مسئله

در این پژوهش، رفتار ارتعاشی یک تیر جدار نازک با مقطع دایره‌ای متغیر بررسی شد. شعاع تیر در طول آن کاهش یافته و در انتها به شکل مخروط ناقص ختم می‌شود، که تحت نیروی گسترده سینوسی قرار دارد (شکل ۱). مشخصات تیر در جدول ۱ ارائه شده است.



شکل ۱. طرح برش خورده تیر مورد پژوهش

جدول ۱- مشخصات تیر مورد پژوهش با مقطع متغیر

پارامتر	مقدار	واحد
طول تیر	۳	meter
قطر بزرگتر	۰/۵	meter
قطر کوچکتر	۰/۲	meter
ضخامت تیر	۰/۰۱	meter
E مدول الاستیسیته	2.07×10^9	Pascal
ρ چگالی فولاد	۷۸۰۰	Kg/m3
ضریب پواسون ν	۰/۳	-
فرکانس تحریک ω	۱/۶	Hz
F_0 دامنه نیرو گسترده	۱۰۰۰	N

۲-۲ ماتریس سختی و جرمی

در روش رایلی-ریتز، ماتریس‌های سختی و جرمی با استفاده از توابع شکل تعریف می‌شوند که رفتار جابجایی و تغییر شکل تیر را توصیف می‌کنند. ابتدا توابع شکل فرضی برای جابجایی تیر انتخاب شده و سپس در معادلات انرژی پتانسیل و جنبشی جای‌گذاری می‌شوند تا معادلات نهایی به صورت ماتریسی حاصل شود. در ادامه، ماتریس‌های جرمی و سختی بصورت روابط ۱ و ۲ محاسبه می‌شوند.

$$M_{ij} = \int_0^L \rho A \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \quad (1)$$

$$K_{ij} = \int_0^L EI \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx \quad (2)$$

۲-۳ فرکانس‌های طبیعی

جهت بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی سیستم به کمک روش رایلی-ریتز از رابطه ۳ استفاده می‌شود:

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \quad (3)$$

که در آن ω_n فرکانس‌های طبیعی و λ_n مقادیر ویژه می‌باشند. در زیر فرکانس طبیعی بدست آمده برای مود اول تا ششم قابل مشاهده است:

$$\omega_1 = 392, \omega_2 = 1725, \omega_3 = 4330, \\ \omega_4 = 8253, \omega_5 = 13722, \omega_6 = 23037$$

۲-۴ تشکیل ماتریس [D] و محاسبه مقادیر ویژه

در روش رایلی-ریتز، ماتریس [D] معمولاً به عنوان ماتریسی تعریف می‌شود که شامل اطلاعات دینامیکی سیستم بوده و به کمک آن فرکانس‌های طبیعی و مودهای ارتعاشی سیستم محاسبه می‌شوند.

$$[D] = [K]^{-1}[M] \quad (4)$$

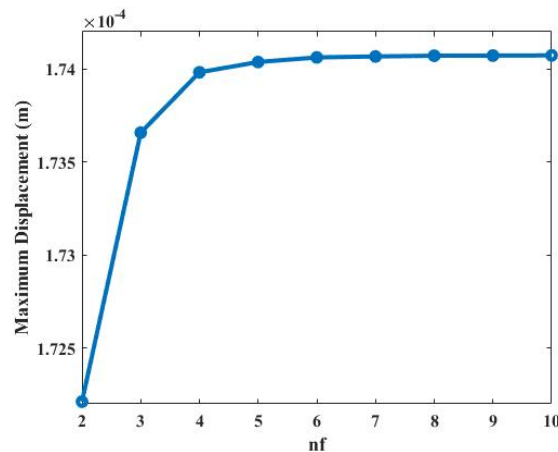
مقادیر ویژه نیز به کمک رابطه زیر بدست می‌آیند:

$$([D] - \lambda_n[I])[C_n] = \{0\} \quad (5)$$

λ_n مقادیر ویژه، I ماتریس همانی و C_n بردارهای ویژه هستند.

۲-۵ محاسبه پاسخ زمانی و بررسی همگرایی

تحلیل همگرایی دقت روش‌های عددی را بررسی می‌کند و نشان می‌دهد که با افزایش دقت محاسبات، نتایج به مقادیر واقعی نزدیک می‌شوند.



شکل ۲. نمودار همگرایی

در این پژوهش، برای بررسی همگرایی، تأثیر تعداد توابع پایه در روش رایلی-ریتز بر مقدار جابه‌جایی ماکزیمم تیر تحلیل شده است. در شکل ۲ نمودار حاصل شده نشان می‌دهند که با افزایش تعداد توابع پایه، مقدار جابه‌جایی به تدریج به یک مقدار ثابت میل می‌کنند. در ادامه جهت محاسبه پاسخ زمانی ابتدا با توجه به شرایط بارگذاری پاسخ مخصوص هر مود (q) با استفاده از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید.

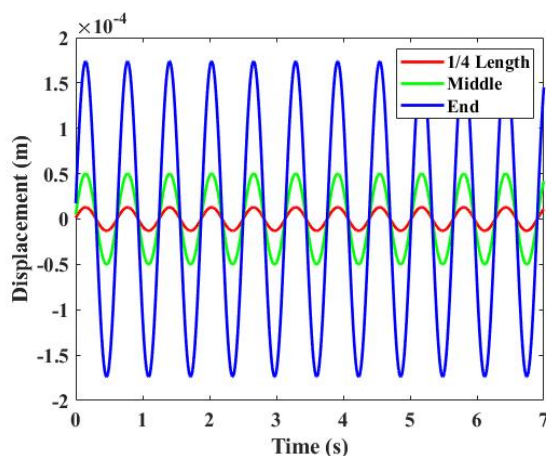
$$q = \int_0^L \varphi \times F \quad (6)$$

این رابطه مشابه رویکرد سری فوریه است که در آن یک تابع به کمک توابع پایه متعامد تجزیه می‌شود. و در نهایت پاسخ زمانی را از رابطه‌ی ۷ بدست می‌آید:

$$W = q \times [C_n] \quad (7)$$

که در این رابطه $\{C\}$ بردار ویژه ماتریس $[D]$ می‌باشد.

نمودار پاسخ سیستم در سه نقطه مورد بررسی قرار گرفته است، در نقطه یک چهارم ابتدایی تیر، در وسط تیر و در انتهای تیر که در شکل ۳ قابل مشاهده می‌باشد.



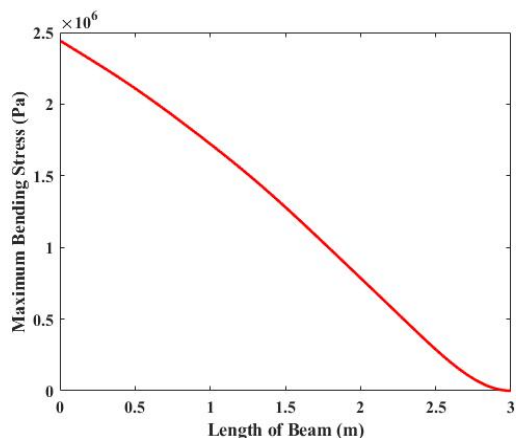
شکل ۳. پاسخ زمانی در سه نقطه مختلف تیر

۲-۶ تنش دینامیکی

در این پژوهش تنش دینامیکی تیر به کمک روش رایلی-ریتز بصورت نیمه تحلیلی و با استفاده از رابطه‌ی ۸ محاسبه می‌شود:

$$\sigma(x, t) = -Ez \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (8)$$

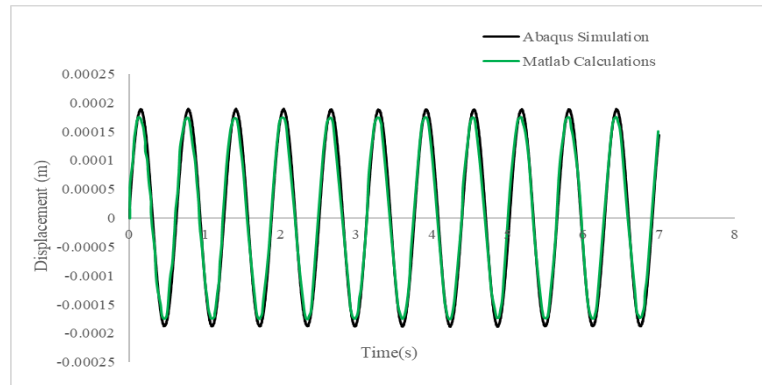
در این رابطه E ، مدول الاستیسیته و z ، فاصله از محور خنثی. نمودار ماکزیمم تنش خمشی در شکل ۴ قابل مشاهده است.



شکل ۴. نمودار دامنه تنش خمشی در طول تیر

۲-۷ اعتبارسنجی

برای ارزیابی دقت روش رایلی-ریتز، نتایج به‌دست‌آمده از این روش با یک تحلیل تحلیلی معتبر مقایسه شد. نمودار جابه‌جایی انتهای تیر حاصل از تحلیل رایلی-ریتز و نتایج نرم‌افزار آباکوس در شکل ۵ نشان داده شده است. مقدار جابه‌جایی ماکزیمم در انتهای تیر در روش رایلی-ریتز برابر با 1.74×10^{-4} و در تحلیل آباکوس برابر با 1.85×10^{-4} به‌دست آمد که اختلاف اندکی بین دو روش مشاهده می‌شود. این اختلاف ناچیز نشان‌دهنده هم‌خوانی مناسب و دقت بالای روش رایلی-ریتز در مقایسه با تحلیل نرم‌افزاری است. در نتیجه، می‌توان نتیجه گرفت که روش رایلی-ریتز ابزاری دقیق، کارآمد و قابل‌اعتماد برای تحلیل‌های دینامیکی و ارتعاشی تیرهای جدار نازک به‌شمار می‌رود.



شکل ۵. مقایسه جابه‌جایی بر حسب زمان در نقطه انتهایی تیر در حل عددی و تحلیلی

۳- بهینه‌سازی تیر

۱-۳ مقدمه

بهینه‌سازی در مهندسی به معنای یافتن ترکیب بهینه پارامترها برای عملکرد مطلوب سیستم با رعایت محدودیت‌های هندسی، مکانیکی یا اقتصادی است. در طراحی سازه‌ها، کاهش وزن سازه و تمرکز تنش‌ها از اهمیت بالایی برخوردار است، زیرا وزن زیاد هزینه و بار اضافی ایجاد می‌کند و تنش زیاد می‌تواند عمر سازه را کاهش دهد. الگوریتم ژنتیک (GA)، معرفی‌شده توسط هالند (۱۹۷۵)، روشی الهام‌گرفته از تکامل و انتخاب طبیعی است که با کار روی جمعیتی از جواب‌ها به‌طور هم‌زمان، احتمال گیر افتادن در مینیمم‌های محلی را کاهش داده و شانس یافتن جواب بهینه سراسری را افزایش می‌دهد [۱۷]. این الگوریتم برای مسائل غیرخطی و پیچیده که اطلاعات مشتق یا پیوستگی دقیق ندارند، بسیار مناسب است.

۲-۳ رویکرد و مراحل بهینه‌سازی NSGA-II

در این پژوهش، NSGA-II برای بهینه‌سازی هم‌زمان وزن و تنش تیر استفاده شد. این الگوریتم با اصول تکامل طبیعی، مجموعه‌ای از راه‌حل‌های پارتو ارائه می‌دهد تا گزینه‌های بهینه متناسب با نیاز طراحی انتخاب شوند. جمعیت کروموزوم‌ها شامل ضرایب توابع ضخامت و قطر تیر است و با اعمال ترکیب و جهش، نسل‌های بعدی تولید می‌شوند تا به همگرایی برسند. این روش امکان انتخاب راه‌حل نهایی با توجه به تضاد وزن و تنش را فراهم می‌کند. متغیرهای طراحی: در این پژوهش، توزیع ضخامت و قطر بیرونی تیر به صورت چندجمله‌ای درجه سوم نسبت به طول تیر مدل‌سازی شده‌اند. همچنین در پیاده‌سازی الگوریتم، از تنظیمات اولیه مطابق جدول ۲ استفاده شده است.

جدول ۲. تنظیمات اولیه بهینه‌سازی

مقدار	احتمال جهش		احتمال تقاطع		حداکثر تکرار		اندازه جمعیت	
	۰/۳	۰/۷	۰/۳	۰/۷	۱۰۰۰	۸۰۰	۰/۳	۰/۷
متغیر طراحی	d۳	d۲	d۱	d۰	t۳	t۲	t۱	t۰
کران پایین	-۰/۰۳	-۰/۰۳	-۰/۰۳	۰/۱	-۰/۰۳	-۰/۰۳	-۰/۰۳	۰/۰۰۲
کران بالا	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۱	۰/۰۳	۰/۰۳	۰/۰۳	۰/۱

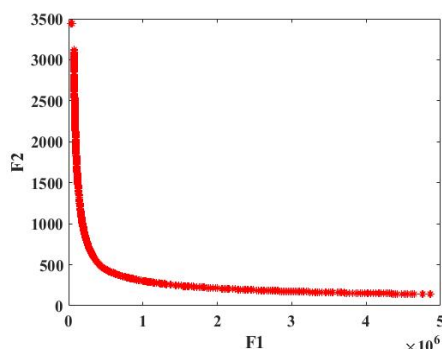
توابع هدف: در این پژوهش، فرآیند بهینه‌سازی با هدف کاهش وزن کل سازه و کاهش بیشینه تنش خمشی ناشی از بارگذاری دینامیکی صورت گرفته است. بدین منظور، دو تابع هدف مستقل تعریف شده‌اند: یکی برای کمینه‌سازی جرم تیر و دیگری برای کمینه‌سازی تنش خمشی حداکثر در طول تیر. روابط ریاضی این توابع در رابطه زیر ارائه شده است.

$$F_1 = \int_0^L \frac{\pi}{4} [D^2 - (D - 2T)^2] \rho \, dx \quad (9)$$

$$F_2 = \max_{x \in [0, L]} |\sigma(x, t)| \quad (10)$$

۳-۳ نتایج بهینه‌سازی

پس از اجرای الگوریتم NSGA-II و طی کردن هزار نسل، مجموعه‌ای از پاسخ‌های غیرمغلوب (پارتو-بهینه) حاصل شده است. این پاسخ‌ها نشان‌دهنده تعادل‌های مختلف بین وزن سازه (جرم تیر) و تنش خمشی هستند. خروجی نهایی به صورت یک مجموعه از طرح‌ها ارائه می‌شود که در آن‌ها، هیچ طرحی وجود ندارد که همزمان در هر دو هدف از بقیه بهتر باشد؛ بلکه هر طرح نسبت به دیگری در یک هدف برتری دارد و در دیگری ضعیف‌تر است. این ویژگی، مشخصه اصلی مرز پارتو است. در شکل ۶ مرز پارتو به وضوح قابل مشاهده است.



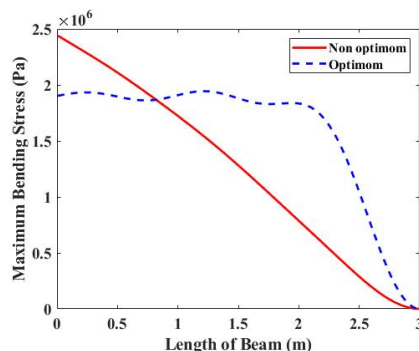
شکل ۶. نمایش جبهه پارتو بهینه براساس کمینه وزن و تنش

در نمودار مرز پارتو، محور عمودی وزن سازه و محور افقی تنش ماکزیمم را نشان می‌دهد و طراح با مشاهده این نمودار می‌تواند تعادل میان اهداف را ارزیابی کند. نقطه شماره ۴ به عنوان راه‌حل بهینه انتخاب شد، زیرا کمترین فاصله اقلیدسی تا نقطه ایده‌آل (کمترین وزن و تنش) دارد و وزن سازه ۱۴٪ کاهش و تنش ۲۰٪ بهینه شده است. توابع قطر و ضخامت بهینه شده در این نقطه در روابط ۱۱ و ۱۲ ذکر شده است.

$$T(x) = 0.01047 - 0.00029x - 0.00010x^2 + 0.00007x^3 \quad (11)$$

$$D(x) = 0.54694 - 0.14550x - 0.03164x^2 + 0.00929x^3 \quad (12)$$

همچنین در شکل ۷ مقایسه‌ای بین تنش بهینه نشده و تنش بهینه شده نمایش داده شده است.



شکل ۷. مقایسه توزیع تنش خمشی در حالت بهینه و غیربهینه

شکل ۷ تنش خمشی را در دو حالت طراحی اولیه (غیربهینه) و طراحی بهینه‌شده مقایسه می‌کند. نتایج نشان می‌دهد که در طرح بهینه‌شده با استفاده از الگوریتم NSGA-II، توزیع تنش بیشینه در طول تیر یکنواخت‌تر شده و تمرکز تنش در ناحیه ابتدایی تیر به طور محسوسی کاهش یافته است. این تغییرات نشان‌دهنده بهبود عملکرد مکانیکی سازه در برابر بارگذاری خمشی و اثربخشی فرآیند بهینه‌سازی می‌باشد.

۴- نتیجه گیری

نتایج حاصل از تحلیل‌های انجام‌شده، نشان‌دهنده دقت روش رایلی-ریتز در مقایسه با نرم‌افزارهای تحلیلی عددی است. مقایسه تطبیقی نتایج به‌دست‌آمده از روش رایلی-ریتز با خروجی‌های نرم‌افزار آباکوس، صحت و دقت بالای این روش را در تحلیل ارتعاشات و تنش‌های دینامیکی تیرهای جدار نازک با مقطع متغیر تأیید می‌کند. از مزایای این روش می‌توان به سرعت بالای محاسباتی آن اشاره کرد که امکان بررسی دقیق‌تر رفتار دینامیکی تیرهای پیچیده را با هزینه محاسباتی کمتر نسبت به روش‌های عددی فراهم می‌سازد. به‌منظور بهینه‌سازی رفتار تنشی و کاهش احتمال خرابی‌های ناشی از خستگی، یک برنامه بهینه‌سازی برای تعیین بهترین توزیع ضخامت و قطر در طول تیر توسعه داده شد. نتایج این بهینه‌سازی نشان داد که با افزایش ضخامت در نواحی بحرانی تنش و کاهش ضخامت در نواحی کم تنش، می‌توان ضمن حفظ وزن ثابت سازه، هزینه‌های ساخت را کاهش داده و توزیع تنش را یکنواخت‌تر کرد.

مراجع

1. S.S. Rao, *Mechanical Vibrations*, 5th ed., Pearson, Boston, 2017.
2. J.R. Banerjee, F.W. Williams, "Coupled bending-torsional dynamic stiffness matrix for Timoshenko beam elements," *Computers & Structures*, 42 (1992) 301-310.
3. M.C. Ece, M. Aydogdu, V. Taskin, "Vibration of a variable cross-section beam," *Mechanics Research Communications*, 34 (2007) 78-84.
4. F. de Borbón, D. Ambrosini, "On free vibration analysis of thin-walled beams axially loaded," *Thin-Walled Structures*, 48 (12) (2010) 915-920.
5. J. Li, R. Shen, H. Hua, X. Jin, "Coupled bending and torsional vibration of axially loaded thin-walled Timoshenko beams," *International Journal of Mechanical Sciences*, 46 (2) (2004) 299-320.
6. A. Prokić, D. Lukić, "Flexural-torsional vibration analysis of axially loaded thin-walled beam," *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 34 (2012) 262-268.
7. S. Irani, S. Sazesh, "Random vibration of cantilever tapered beam under stochastic excitation," *Modares Mechanical Engineering*, 13 (2013) 138-154.
8. L. Xiaobin, X. Shuangxi, W. Weiguo, L. Jun, "An exact dynamic stiffness matrix for axially loaded double-beam systems," *Sadhana*, 39 (2014) 607-623.
9. M. Soltani, A. Ahanian, "Free vibration and flexural-torsional stability analyses of axially functionally graded tapered thin-walled beam resting on elastic foundation," *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 53 (2021) 3587-3614.
10. M. Soltani, A. Ahanian, "Free vibration and flexural-torsional stability analyses of axially functionally graded tapered thin-walled beam resting on elastic foundation," *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 53 (2021) 3587-3614.
11. A. Elkaimbillah, B. Braikat, F. Mohri, N. Damil, "A one-dimensional model for computing forced nonlinear vibration of thin-walled composite beams with open variable cross-sections," *Thin-Walled Structures*, 159 (2021) 107211.
12. A. Burlon, G. Failla, "An original framework for triply-coupled bending-torsion dynamics of beams," *Thin-Walled Structures*, 159 (2021) 107317.
13. J. Ghanbari, R. Adelkhani, "Analysis of transverse free vibrations of rotating beams with variable cross-section using the point collocation method," *International Journal of Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 25 (2024) 193-207.
14. Z. Jia, G.W. Stewart, "An analysis of the Rayleigh-Ritz method for approximating eigenspaces," *Mathematics of Computation*, 70 (2001) 637-647.
15. K.K. Pradhan, S. Chakraverty, "Free vibration of Euler and Timoshenko functionally graded beams by Rayleigh-Ritz method," *Composites Part B: Engineering*, 51 (2013) 175-184.
16. K.K. Pradhan, S. Chakraverty, "Effects of different shear deformation theories on free vibration of functionally graded beams," *International Journal of Mechanical Sciences*, 82 (2014) 149-160.
17. K. Deb, *Optimization for Engineering Design: Algorithms and Examples*, 2nd ed., PHI Learning Pvt. Ltd., New Delhi, 2012.