

## تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌ای استوانه‌ای با ساختار آگزتیک پروانه‌ای شکل به روش تفاضل مربعات دیفرانسیل

نیما مهندسی<sup>۱\*</sup>، رضا عادلخانی<sup>۱</sup>، محمد فدایی<sup>۲</sup>، مصطفی طالبی توتی<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> ایران، قم، بلوار خداکرم، دانشگاه صنعتی قم، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشجوی دکتری

<sup>۲</sup> ایران، قم، بلوار خداکرم، دانشگاه صنعتی قم، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشیار

\*پست الکترونیکی نویسنده مسئول: Mohandesi.n@qut.ac.ir

### چکیده

در این مقاله ارتعاشات آزاد پوسته‌ای استوانه‌ای پروانه‌ای شکل مورد مطالعه قرار گرفت. سازه‌های آگزتیکی به سازه‌های شبکه‌ای اشاره می‌کند که برخلاف سازه‌های مرسوم، ضریب پواسون این سازه‌ها منفی می‌باشد. از جمله سازه‌های پواسون منفی که در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است، می‌توان به آگزتیک پروانه‌ای شکل اشاره کرد. بر اساس نظریه‌ی کلاسیک پوسته‌ها و با استفاده از اصل همیلتون معادلات ارتعاشاتی پوسته‌ای استوانه‌ای آگزتیک پروانه‌ای شکل بدست آمد. به روش حل عددی دیفرانسیل مربعات معادلات حاکم حل گردید و فرکانس‌های طبیعی بدست آمد. جهت صحت‌سنجی، نتایج روش پیاده سازی شده ابتدا برای یک پوسته‌ای استوانه‌ای متراکم با نتایج حاصل از شبیه‌سازی المان محدود توسط نرم افزار آباکوس مقایسه گردید. هدف اصلی این تحقیق ارزیابی تأثیر ویژگی‌های هندسی ساختار آگزتیک بر عملکرد ارتعاشی پوسته تحت شرایط مرزی گیردار است. مدل پیشنهادی، درک دقیقی از چگونگی تغییر فرکانس‌های طبیعی هندسه‌های آگزتیک را فراهم می‌کند و در نتیجه بینش‌های ارزشمندی در طراحی پوسته‌های با عملکرد بالا ارائه می‌دهد.

**کلمات کلیدی:** ارتعاشات؛ پوسته‌ای استوانه‌ای؛ آگزتیک پروانه‌ای شکل؛ روش عددی مربعات دیفرانسیلی.

### ۱- مقدمه

فرا مواد آگزتیک و سازه‌های پوسته‌ای در سال‌های اخیر توجه زیادی را به خود جلب کرده‌اند؛ دلیل این امر، ویژگی‌های برجسته‌ی مکانیکی، آکوستیکی و ارتعاشی آن‌هاست که کاربردهای گسترده‌ای در صنایع هوافضا، خودروسازی، مهندسی پزشکی و کنترل نویز دارند. قابلیت این مواد در نمایش نسبت پواسون منفی و همچنین سفتی قابل تنظیم، مزایای منحصر به فردی در جذب انرژی، کاهش نویز و مقاومت در برابر ارتعاش فراهم می‌آورد [۱-۳]. طراحی‌های الهام گرفته از طبیعت، مانند ساختارهای پروانه‌ای یا گلبرگ‌مانند، بهبود

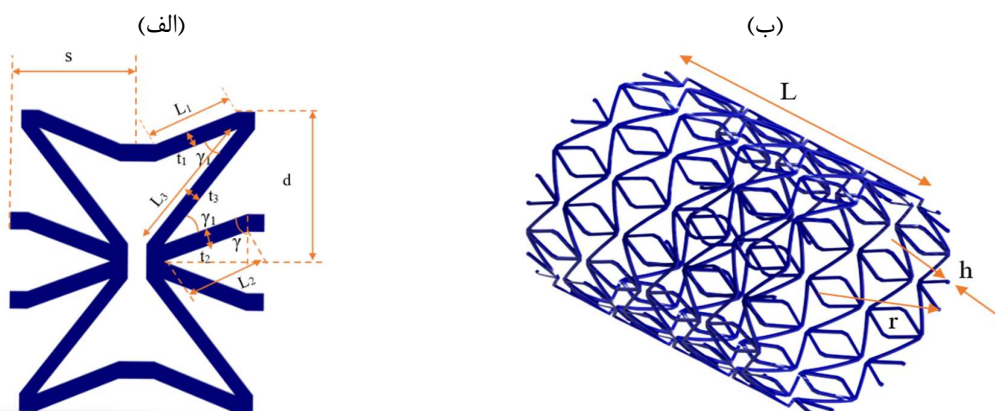
چشمگیری در عملکرد مکانیکی و آکوستیکی نسبت به پیکربندی‌های مرسوم لانه زنبوری و بازگشتی نشان داده‌اند [۴-۷]. این سازه‌ها می‌توانند میزان جذب انرژی ویژه را تحت بارگذاری فشاری تا دو تا سه برابر افزایش دهند، مقاومت ضربه‌ای بالاتری ارائه کنند و در عین حال، به کمک بهینه‌سازی مبتنی بر انرژی، الگوریتم‌های ژنتیک و شبیه‌سازی اجزای محدود، نسبت پواسون منفی و سفتی را به‌طور دلخواه تنظیم نمایند [۶، ۸]. فراتر از ساختارهای زیست‌الهام، طراحی‌های پیشرفته‌تر آگزتیک و ترکیب آن‌ها با مواد کامپوزیتی، دامنه‌ی گسترده‌ای از پیکربندی‌های نوین را ایجاد کرده‌اند. به‌عنوان نمونه، لانه‌زنبوری‌های دبل-پیکانی بازگشتی و سایر ساختارهای نوآورانه، جذب انرژی بالایی ارائه داده و توانایی حفظ نسبت پواسون منفی در شرایط بارگذاری متنوع را نشان می‌دهند [۹-۱۱]. همچنین، شبکه‌های سه‌بعدی آگزتیک چاپ‌شده با فناوری پرینت سه‌بعدی مقاومت خستگی بیشتری نسبت به ساختارهای غیر آگزتیک داشته‌اند که آن‌ها را برای کاربردهای زیست‌پزشکی و ورزشی نویدبخش می‌سازد [۱۲]. از سوی دیگر، آگزتیک‌های مگنتومکانیکی و کامپوزیت‌های دوفازی با استفاده از محرک‌های خارجی یا برهم‌کنش فازی، خواص قابل تنظیمی ایجاد کرده‌اند که مسیرهای جدیدی برای توسعه‌ی مواد چندمنظوره فراهم می‌کند [۱۳، ۱۴]. به موازات این تحولات، پوسته‌های کامپوزیتی و با خواص تدریجی نیز به‌طور گسترده‌ای از منظر رفتار ارتعاشی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. در این راستا، روش‌های عددی پیشرفته‌ای همچون تفاضل مربعات تعمیم‌یافته و روش تفاضلی موضعی تطبیقی به‌کار گرفته شده‌اند. پژوهش‌ها بر روی پوسته‌های استوانه‌ای، مخروطی و حلقوی با توزیع تدریجی خواص نشان داده‌اند که تغییرات مواد در راستای ضخامت، پاسخ دینامیکی را بهبود می‌بخشد. در عین حال، روش تفاضل مربعات دیفرانسیل نتایج دقیق و محاسباتی کارآمد ارائه داده که در مقایسه با نرم‌افزارهای اجزای محدود نیز تأیید شده است [۱۵، ۱۶]. همچنین، رویکرد چنددامنه‌ای امکان تحلیل پوسته‌های دارای سوراخ و بریدگی را نیز فراهم کرده [۱۷] و با رفع مشکلات عددی همچون مقادیر ویژه کاذب، به‌ویژه در محاسبات بزرگ‌مقیاس، کارایی بالایی از خود نشان داده است [۱۸، ۱۹]. این دستاوردها جایگاه روش تفاضل مربعات دیفرانسیل را به‌عنوان ابزاری قدرتمند برای تحلیل ارتعاشی پوسته‌ها تحت شرایط مرزی متنوع تثبیت می‌کنند.

در همین راستا، طی مطالعه حاضر، ارتعاشات آزاد پوسته‌ی استوانه‌ای با هسته‌ی آگزتیک پروانه‌ای مورد بررسی قرار گرفته است. در این پژوهش، برای تحلیل پاسخ فرکانسی، از روش تفاضل مربعات دیفرانسیل به‌عنوان یک رویکرد عددی توانمند استفاده شده است. هدف این پژوهش، ارزیابی تأثیر ویژگی‌های هندسی ساختار آگزتیک بر رفتار ارتعاشی پوسته است. نتایج به‌دست‌آمده می‌تواند مسیر جدیدی برای طراحی و توسعه‌ی سازه‌های چندمنظوره با عملکرد ارتعاشی و مکانیکی بهینه فراهم سازد.

## ۲- ویژگی‌های هندسی و مادی پوسته‌ی استوانه‌ای متشکل از سلول آگزتیک پروانه‌ای شکل

$$\begin{aligned}
 \eta &= \gamma - \gamma_1 \\
 \eta_1 &= \frac{d}{s} \\
 t_1 &= t_2 = t \sin \gamma \\
 t_3 &= t \cos \eta \\
 e &= \frac{L_3}{t_3} \\
 s &= 3t + 2L_1 \sin \gamma - L_3 \sin \eta \\
 k_1 &= \frac{L_1}{t_1} \\
 d &= 2t + L_3 \cos \eta \\
 R &= e(s \sin \eta - d \cos)^2 + e^3(d \sin \eta + s \cos \eta)^2
 \end{aligned} \tag{۱}$$

در شکل ۱ الف سلول آگزتیک پروانه‌ای شکل نشان داده شده است. هندسه‌ی سلول آگزتیک پروانه‌ای شکل مطابق با پارامترهای رابطه‌ی ۱ مشخص می‌گردد.  $L_1$ ،  $L_2$  و  $L_3$  نشان دهنده‌ی طول بازوها؛  $t_1$ ،  $t_2$  و  $t_3$  ضخامت بازوها؛  $S$  اندازه‌ی یک چهارم سلول واحد در امتداد محور  $x$ ها و  $d$  اندازه‌ی یک چهارم سلول واحد در امتداد محور  $y$ ها می‌باشد.  $\gamma$  و  $\gamma_1$  به زاویه‌ی بین بازوها اشاره دارد. در شکل ۲ ب پوسته‌ی استوانه‌ای متشکل از سلول آگزتیک پروانه‌ای شکل نشان داده شده است.  $L$  و  $R$  به ترتیب به طول و شعاع پوسته‌ی استوانه‌ای و  $h$  به ضخامت آن اشاره می‌کند.



شکل ۱. الف) شماتیکی از سلول واحد آگزتیک پروانه‌ای شکل ب) پوسته‌ی استوانه‌ای متشکل از سلول‌های پروانه‌ای شکل

### ۳- معادلات حاکم

مطابق قانون هوک و براساس نظریه کلاسیک، معادلات ساختاری برای پوسته‌ی استوانه‌ای به صورت معادله‌ی (۲) ارائه می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

که درایه‌های ماتریس سفتی در رابطه‌ی (۲) به صورت رابطه‌ی (۳) قابل محاسبه است.

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}, Q_{12} = \frac{\mu_{12}E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}, Q_{66} = G_{12} \end{aligned} \quad (3)$$

با انتگرال‌گیری از مولفه‌های تنش در راستای ضخامت، نتیجه‌های نیروی محوری، برشی و ممان به صورت رابطه (۴) قابل محاسبه خواهد بود.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \\ \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (۴)$$

که در این رابطه،  $N$  به منتجه‌های نیروی محوری،  $Q$  به منتجه‌های نیروی برشی و  $M$  به منتجه‌های ممان اشاره می‌کنند. مقادیر  $A$ ،  $B$  و  $D$  از انتگرال گیری مطابق رابطه‌ی (۵) بدست می‌آید.

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, z^2) dz \quad (۵)$$

در رابطه‌ی (۵)،  $h$  به ضخامت پوسته‌ی استوانه‌ی آگزتیک پروانه‌ای اشاره دارد. معادله حرکت پوسته‌ی استوانه‌ای جدار نازک براساس نظریه بهبود یافته‌ی پوسته‌ی دانیل به صورت روابط (۶) نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= \rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) &= \rho_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{N_x}{R} + q &= \rho_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (۶)$$

where  $\rho_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz$

در رابطه‌ی (۶)،  $\rho_1$  بیانگر جرم متوسط پوسته استوانه‌ی آگزتیک پروانه‌ای بر واحد سطح می‌باشد.  $q$  فشار خارجی است که به طور یکنواخت روی سطح پوسته توزیع می‌شود.

معادلات ارتعاشاتی حاکم بر پوسته‌ی استوانه‌ی آگزتیک پروانه‌ای به روش دیفرانسیل مربعات (DQM) حل گردید. در این روش، مشتقات مرتبه‌های مختلف تابع جابه‌جایی در نقاط شبکه، به صورت ترکیبی خطی از مقادیر تابع در همان نقاط بیان می‌شوند. این ویژگی موجب می‌شود که معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم، به مجموعه‌ای از معادلات جبری در گره‌های شبکه تبدیل شوند. در روش دیفرانسیل مربعات، مشتقات هر تابع در یک نقطه به صورت ترکیب خطی از مقادیر تابع در نقاط شبکه‌ای دیگر مطابق رابطه‌ی (۷) نوشته می‌شود.

$$\left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(n)} f(x_j), n = 1, 2, \dots, N-1 \quad (۷)$$

جایی که  $F(x)$  به تابع،  $C_{ij}$  ضریب وزنی و  $N$  به تعداد نقاط شبکه اشاره دارد. این ضرایب از رابطه‌ی لاگرانژی مطابق رابطه‌ی (۸) بدست می‌آید.

$$C_{ij}^1 = \begin{cases} \frac{\prod_{k=1, k \neq i}^N (x_i - x_k)}{(x_i - x_j) \prod_{k=1, k \neq j}^N (x_j - x_k)} & i \neq j \\ - \sum_{k=1, k \neq i}^N A_{ik}^{(1)} & i = j \end{cases} \quad (۸)$$

و برای مشتقات مرتبه‌ی بالاتر

$$A^{(m)} = (A^{(1)})^m \quad (9)$$

با جمع کردن همه معادلات در قالب ماتریسی، به صورت رابطه (۱۰) نوشته می‌شود.

$$KW = \omega^2 MW \quad (10)$$

در نهایت، با حل مسئله مقدار ویژه مطابق رابطه‌ی (۱۱) فرکانس‌های طبیعی بدست می‌آید.

$$|K - \omega^2 M| = 0 \quad (11)$$

#### ۴- صحنه‌سنجی

جدول ۱. ویژگی‌های هندسی و مادی پوسته‌ی استوانه‌ی آگزتیک پروانه‌ای شکل

| $L_1(m)$ | $L_3(m)$ | $t(m)$ | $\gamma^p$ | $\gamma^r$ | $d(m)$  | $s(m)$  | $R(m)$   | $L(m)$  | $h(m)$ | $E(GPa)$ | $\nu$ | $\rho(kg/m^3)$ |
|----------|----------|--------|------------|------------|---------|---------|----------|---------|--------|----------|-------|----------------|
| ۰.۱      | ۰.۱۶     | ۰.۰۱۲  | ۶۳.۵۶      | ۳۰         | ۰.۱۵۷۳۳ | ۰.۱۲۶۶۳ | ۱.۰۰۶۵۹۸ | ۳.۰۳۹۱۲ | ۰.۰۱   | ۲۱۰      | ۰.۳   | ۷۸۰۰           |

جهت صحنه‌سنجی روش پیاده‌سازی شده، نتایج روش تفاضل مربعات با نتایج حاصل از شبیه سازی المان محدود در نرم افزار آباکوس برای یک پوسته‌ی استوانه‌ای متراکم مقایسه می‌گردد. در صورتی که نتایج روش تفاضل مربعات پیاده سازی شده نزدیک به نتایج المان محدود باشد می‌توان نتیجه گیری کرد که با تغییر ویژگی‌های مادی از پوسته‌ی استوانه‌ای متراکم به پوسته‌ی استوانه‌ی آگزتیک پروانه‌ای شکل مطابق با مرجع [۸]، فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای پروانه‌ای شکل بدست می‌آید.

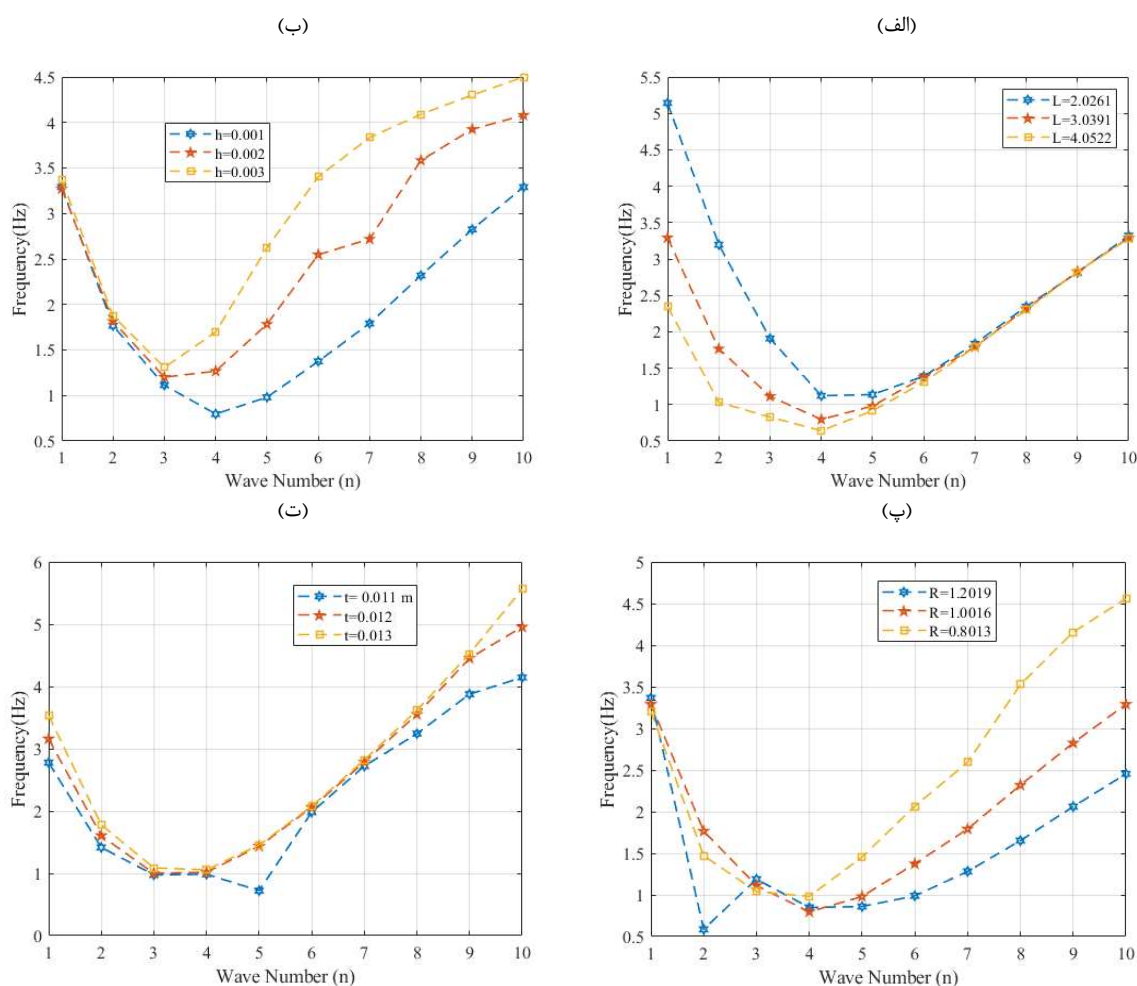
جدول ۲. مقایسه‌ی نتایج تفاضل مربعات و با نتایج المان محدود

| درصد خطا (%) | فرکانس طبیعی المان محدود (هرتز) | فرکانس طبیعی حاضر (هرتز) | شماره مود |
|--------------|---------------------------------|--------------------------|-----------|
| ۱.۵          | ۳۰.۸۲                           | ۳۰.۳۵                    | (۱، ۹)    |
| ۲.۲          | ۳۱.۶۵                           | ۳۰.۹۴                    | (۱ و ۱۰)  |
| ۱            | ۳۲.۸۲                           | ۳۲.۴۹                    | (۱ و ۸)   |
| ۰.۷          | ۳۸.۳۱                           | ۳۸.۰۴                    | (۱ و ۷)   |

#### ۵- نتایج

در این قسمت تاثیر تغییر پارامترهای هندسی بر روی فرکانس طبیعی پوسته‌ی استوانه‌ی آگزتیک پروانه‌ای شکل بررسی گردید. نمودار تغییرات فرکانس طبیعی بر حسب تغییرات پارامتر مورد نظر با ثابت در نظر گرفتن سایر پارامترها برای سه مود (۱ و ۳)، (۱ و ۲) و

(۱۱) رسم گردیده است. در صورتی که مقدار پارامتر در شکل‌ها ذکر نشود، مطابق با جدول ۱ خواهد بود. در شکل ۱ (الف) نمودار تغییرات فرکانس طبیعی برحسب شماره موج‌های محوری برای طول‌های مختلف پوسته‌ی استوانه‌ای رسم گردیده است. مشاهده می‌گردد که با افزایش طول استوانه، فرکانس طبیعی کاهش پیدا می‌کند و این کاهش در شماره مودهای پایین‌تر محسوس می‌باشد. در شکل ۲ (ب) نمودار تغییرات فرکانس طبیعی برحسب شماره موج‌های محوری برای ضخامت‌های مختلف پوسته‌ی استوانه‌ای نشان داده شده است. مشاهده می‌گردد که با افزایش ضخامت فرکانس طبیعی افزایش پیدا می‌کند که در شماره مودهای بالاتر محسوس‌تر است. در شکل ۲ (پ) نمودار تغییرات فرکانس طبیعی برحسب شماره مودهای محوری برای شعاع‌های مختلف پوسته‌ی استوانه‌ای نشان داده شده است. مشاهده می‌گردد که با کاهش شعاع پوسته‌ی استوانه‌ای، فرکانس افزایش پیدا می‌کند که در شماره مودهای بالاتر محسوس‌تر است. در شکل ۲ (ت) نمودار تغییرات فرکانس طبیعی برحسب شماره موج‌های محوری برای عرض‌های مختلف تیرهای سازنده سلول آگزتیکی نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش عرض تیر، فرکانس طبیعی افزایش پیدا می‌کند.



شکل ۲. نمودار تغییرات فرکانس طبیعی برحسب شماره موج‌های محوری برای (الف) طول استوانه‌های مختلف ( $L$ )، (ب) ضخامت استوانه‌های مختلف ( $h$ )، (پ) شعاع استوانه‌های مختلف ( $R$ ) (ت) عرض تیرهای سازنده سلول واحد ( $t$ )

## ۶- نتیجه‌گیری

ارتعاشات آزاد پوسته‌ی استوانه‌ی آگزتیک پروانه‌ای براساس نظریه کلاسیک پوسته‌ها و با استفاده از روش دیفرانسیل مربعات حل شد. نتایج بدست آمده مطابق زیر است.

۱. با افزایش طول استوانه مشاهده می‌گردد که فرکانس طبیعی کاهش پیدا می‌کند. میزان کاهش فرکانس طبیعی در اثر افزایش طول در شماره مودهای پایین (از ۱ تا ۶)، بسیار زیاد است.
۲. با افزایش ضخامت پوسته‌ی استوانه‌ای مشاهده می‌گردد که فرکانس طبیعی افزایش پیدا می‌کند. میزان افزایش فرکانس طبیعی در اثر افزایش ضخامت در شماره مودهای بالاتر (از مود ۴ به بالاتر)، بیشتر است.
۳. با افزایش شعاع پوسته استوانه‌ای مشاهده می‌گردد که فرکانس طبیعی کاهش پیدا می‌کند اما میزان کاهش فرکانس طبیعی در شماره مودهای بالاتر (از شماره مود ۵ به بالاتر)، بیشتر است.
۴. با افزایش عرض تیرهای سازنده سلول آگزتیکی مشاهده می‌گردد که فرکانس طبیعی افزایش پیدا می‌کند.

## مراجع

۱. Zhang, Z., Tian, R., Zhang, X., Wei, F., Yang, X.: A novel butterfly-shaped auxetic structure with negative Poisson's ratio and enhanced stiffness. *J Mater Sci.* 56, 14139–14156 (2021). <https://doi.org/10.1007/s10853-021-06141-4>
۲. Wang, Y., Li, C., Chen, X., Zhang, C., Jin, Q., Zhou, G., Wang, C., Zhao, W.: Sound absorption performance based on auxetic microstructure model: A parametric study. *Mater Des.* 232, 112130 (2023). <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.matdes.2023.112130>
۳. Wang, X., Fu, T.: Improvement of broadband low-frequency sound insulation of sandwich plates with negative Poisson's ratio butterfly-shaped auxetic cellular. *Eng Anal Bound Elem.* 166, 105852 (2024). <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2024.105852>
۴. Alomarah, A., Yuan, Y., Ruan, D.: A bio-inspired auxetic metamaterial with two plateau regimes: Compressive properties and energy absorption. *Thin-Walled Structures.* 192, 111175 (2023). <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.tws.2023.111175>
۵. Liu, X., Zhong, Y., Liu, R., Shi, J.: Buckling and post-buckling analysis of butterfly-shaped auxetic core sandwich plates based on variational asymptotic method. *Thin-Walled Structures.* 184, 110464 (2023). <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.110464>
۶. Xiao, C., Tian, R., Zhang, X., Li, S.: Variable stiffness and zero Poisson's ratio of the butterfly-shaped mechanical metamaterial. *Composites Communications.* 49, 101958 (2024). <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.coco.2024.101958>
۷. Li, Z.-Y., Zhang, W.-M., Wang, W.-J., Ho, M.M.P., Xiong, J., Yang, J.-S., Wang, X.-T., Zhang, M., Hu, H.: New 3D petal-like structures with lightweight, high strength, high energy absorption, and auxetic characteristics. *Thin-Walled Structures.* 205, 112483 (2024). <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.tws.2024.112483>
۸. Nosrati, S., Rahmani, O., Hosseini, S.A.: Free vibration analysis of butterfly-shaped auxetic doubly curved nano-shells with nonlocal strain gradient theory. *Thin-Walled Structures.* 214, 113380 (2025). <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.tws.2025.113380>
۹. Kahraman, M.F., Genel, K.: Effect of angle and thickness of cell wall on bending behavior of auxetic beam. *Mater Today Commun.* 38, 108339 (2024). <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.mtcomm.2024.108339>
۱۰. Wang, H., Shao, J., Zhang, W., Yan, Z., Huang, Z., Liang, X.: Three-point bending response and energy absorption of novel sandwich beams with combined re-entrant double-arrow auxetic honeycomb cores. *Compos Struct.* 326, 117606 (2023). <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.117606>
۱۱. Grima, J.N., Chetcuti, E., Manicaro, E., Attard, D., Camilleri, M., Gatt, R., Evans, K.E.: On the auxetic properties of generic rotating rigid triangles. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.* 468, 810–830 (2011). <https://doi.org/10.1098/rspa.2011.0273>
۱۲. Lvov, V.A., Senatov, F.S., Korsunsky, A.M., Salimon, A.I.: Design and mechanical properties of 3D-printed auxetic honeycomb structure. *Mater Today Commun.* 24, 101173 (2020). <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.mtcomm.2020.101173>

۱۳. Grima, J.N., Caruana-Gauci, R., Dudek, M.R., Wojciechowski, K.W., Gatt, R.: Smart metamaterials with tunable auxetic and other properties. *Smart Mater Struct.* 22, 084016 (2013). <https://doi.org/10.1088/0964-1726/22/8/084016>
۱۴. Zhu, C.W., Kaddouri, W., Kanit, T., Jiang, Q., Ounaies, S.: Effect of auxetic behavior on effective properties of composite materials. *Mech Res Commun.* 145, 104389 (2025). <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2025.104389>
۱۵. Tornabene, F., Viola, E., Inman, D.J.: 2-D differential quadrature solution for vibration analysis of functionally graded conical, cylindrical shell and annular plate structures. *J Sound Vib.* 328, 259–290 (2009). <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.07.031>
۱۶. Alibeigloo, A., Rajaei Piteh Noee, A.: Static and free vibration analysis of sandwich cylindrical shell based on theory of elasticity and using DQM. *Acta Mech.* 228, 4123–4140 (2017). <https://doi.org/10.1007/s00707-017-1914-4>
۱۷. Talezadehlari, A.: Free vibration analysis of perforated composite cylindrical shell and panel using multi-domain generalized differential quadrature (GDQ) method. *Compos Struct.* 287, 115337 (2022). <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.115337>
۱۸. Loy, C.T., Lam, K.Y., Shu, C.: Analysis of Cylindrical Shells Using Generalized Differential Quadrature. *Shock and Vibration.* 4, 538754 (1997). <https://doi.org/https://doi.org/10.3233/SAV-1997-4305>
۱۹. Zhang, L., Xiang, Y., Wei, G.W.: Local adaptive differential quadrature for free vibration analysis of cylindrical shells with various boundary conditions. *Int J Mech Sci.* 48, 1126–1138 (2006). <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2006.05.005>