

بهبود تشخیص و ارزیابی شدت عیوب سیستم‌های دنده‌ای: مطالعه مقایسه‌ای تکنیک‌های چگالی انرژی لحظه‌ای و تجزیه سیگنال

ابوالفضل مختاری^۱، رضا حسن نژاد قدیم^{۲*}

^۱ ایران، تبریز، بلوار ۲۹ بهمن، دانشگاه تبریز، دانشکده مهندسی مکانیک، کدپستی ۱۴۷۶۶-۵۱۶۶۶، دانشجوی ارشد.

^۲ ایران، تبریز، بلوار ۲۹ بهمن، دانشگاه تبریز، دانشکده مهندسی مکانیک، کدپستی ۱۴۷۶۶-۵۱۶۶۶، دانشیار.

*پست الکترونیکی نویسنده مسئول: hassannejhad@tabrizu.ac.ir

چکیده

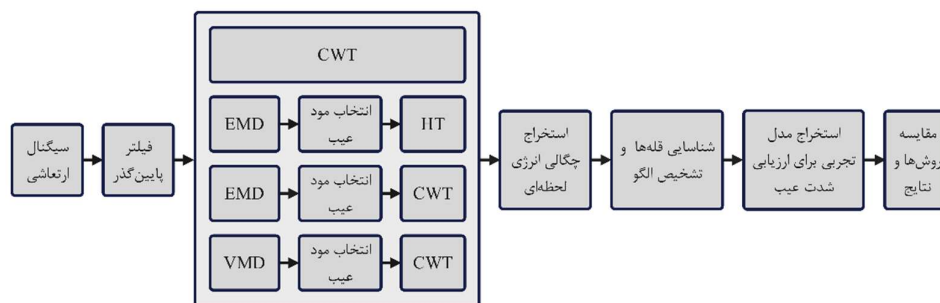
تشخیص زودهنگام عیوب چرخ‌دنده‌ها نقشی حیاتی در افزایش ایمنی و پیاده‌سازی استراتژی‌های نگهداری و تعمیرات پیش‌بینانه ایفا می‌کند. در این پژوهش، یک روش نوین مبتنی بر تحلیل چگالی انرژی لحظه‌ای سیگنال‌های ارتعاشی، برای شناسایی و ارزیابی شدت عیوب ارائه شده است. در این راستا، ویژگی‌های مبتنی بر انرژی با استفاده از روش‌هایی مانند تبدیل موجک پیوسته، تجزیه مود تجربی و تجزیه مود متغیر استخراج می‌شوند. آزمایش‌ها روی یک مجموعه آزمایشی با عیوب ترک ریشه دندانه در شدت‌های مختلف انجام شده است. نتایج نشان می‌دهد که چگالی انرژی در لحظه درگیری دندانه معیوب، پیک‌های قابل توجهی متناسب با شدت عیب ایجاد می‌کند و برتری این رویکرد را در مقایسه با روش‌های سنتی تایید می‌نماید. در میان روش‌ها، روش ترکیبی VMD و CWT با حساسیت بالا عملکرد بهتری در تشخیص زودهنگام نشان داد. این یافته‌ها پتانسیل بالای این روش پیشنهادی را برای پیاده‌سازی در سیستم‌های نظارت بر وضعیت در صنایع اثبات می‌کند.

کلمات کلیدی: عیب چرخ‌دنده؛ چگالی انرژی لحظه‌ای؛ تبدیل موجک پیوسته؛ تجزیه مود متغیر.

۱- مقدمه

چرخ‌دنده‌ها به عنوان اجزای حیاتی ماشین‌آلات دوار، نقش کلیدی در صنایع مختلف ایفا می‌کنند. با توجه به اینکه بخش قابل توجهی از شکست‌های مکانیکی به عیوب چرخ‌دنده نسبت داده می‌شود، تشخیص زودهنگام ترک به یک ضرورت انکارناپذیر برای جلوگیری از توقف‌های پرهزینه تولید و خسارات فاجعه‌بار تبدیل شده است [۱]. تحلیل ارتعاشات، مؤثرترین رویکرد غیرمخرب برای این منظور است. بروز یک عیب موضعی مانند ترک، با کاهش ناگهانی سختی موضعی درگیری، منجر به تولید پدیده‌های ضربه‌ای گذرا در سیگنال ارتعاشی می‌شود. چالش اصلی، استخراج مؤثر این ویژگی‌های ضربه‌ای کم‌انرژی از سیگنال‌های نویزی و غیریستا است [۲]. روش‌های سنتی حوزه زمان و فرکانس در تحلیل این سیگنال‌های غیریستا کارایی محدودی دارند. این محدودیت، زمینه را برای توسعه تکنیک‌های حوزه زمان-فرکانس فراهم کرده است. در این میان، پژوهش لوتریدیس [۲]، مفهوم چگالی انرژی لحظه‌ای را با

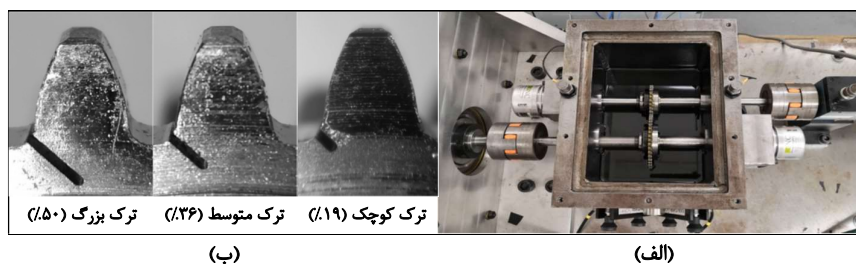
ابزارهایی چون توزیع ویگنر-ویل (WVD^1)، تبدیل موجک پیوسته (CWT^2) و تجزیه مود تجربی (EMD^3) به عنوان یک ویژگی مؤثر معرفی کرد. در همین راستا، ژنگ و همکاران [۳]، برتری تبدیل موجک را در استخراج ویژگی‌های ضعیف عیب اثبات نمودند. لای و همکاران [۴] نیز با ترکیب EMD و CWT به حساسیت بالایی در تشخیص دست یافتند و همچنین ماهگون و همکاران [۵]، از VMD^4 برای تشخیص عیوب چرخ‌دنده‌ها در شرایط سرعت متغیر استفاده کردند. پژوهش حاضر با تکیه بر این مبانی، یک ارزیابی جامع و مقایسه‌ای میان این روش‌ها انجام می‌دهد تا قابل اعتمادترین ابزار برای مدل‌سازی کمی شدت عیب شناسایی شود. نوآوری اصلی این تحقیق، ارائه یک روش ترکیبی برای افزایش مقاومت در برابر نویز و توسعه یک مدل کمی برای تخمین شدت عیب بر اساس ویژگی مبتنی بر انرژی است. چارچوب کلی این پژوهش در فلوچارت شکل (۱) نمایش داده شده است. هدف اصلی این تحقیق، شناسایی کارآمدترین روش برای استخراج یک ویژگی مبتنی بر انرژی و ارائه یک مدل کمی برای تخمین شدت عیب بر اساس آن است.



شکل ۱. فلوچارت راهکار پیشنهادی.

۲- سیستم تست جعبه‌دنده و جمع‌آوری داده‌ها

داده‌های ارتعاشی مورد نیاز در این پژوهش با استفاده از یک مجموعه تست جعبه‌دنده تک‌مرحله‌ای مطابق شکل (۲-الف) جمع‌آوری گردید [۶]. نیروی محرکه سیستم توسط یک موتور القایی با توان ۴ کیلووات تأمین شده و بارگذاری از طریق یک ترمز مغناطیسی بر روی محور خروجی اعمال می‌شود. جعبه‌دنده شامل یک پینیون فولادی با ۲۷ دندانه و یک چرخ‌دنده از همان جنس و با ۴۴ دندانه است که مشخصات هندسی آن‌ها شامل مدول ۲ میلی‌متر و عرض دندانه ۵ میلی‌متر می‌باشد. برای شبیه‌سازی عیوب، ترک‌هایی با سه شدت مختلف (عمق ترک معادل ۱۹٪، ۳۶٪ و ۵۰٪ از عرض دندانه) در ریشه یکی از دندانه‌های پینیون ایجاد گردید (شکل ۲-ب). سیگنال‌های ارتعاشی در شرایط پایدار با سرعت دورانی ورودی ۱۰ هرتز و گشتاور بار ۱۰ نیوتن متر، توسط یک شتاب‌سنج پیزوالکتریک که بر روی پوسته یاتاقان محور ورودی نصب شده بود، با فرکانس نمونه‌برداری ۲۰۰ کیلوهرتز ثبت گردید.



شکل ۲. (الف) سیستم تست جعبه‌دنده. (ب) دندانه‌های پینیون با ترک‌های ایجاد شده در سه سطح شدت مختلف.

^۱ Wigner-Ville Distribution (WVD)

^۲ Continuous Wavelet Transform (CWT)

^۳ Empirical Mode Decomposition (EMD)

^۴ Variational Mode Decomposition (VMD)

۳- روش‌های عیب‌یابی

۳-۱ تبدیل موجک پیوسته

تبدیل موجک پیوسته (CWT) یک ابزار تحلیل زمان-فرکانس قدرتمند با ویژگی تفکیک‌پذیری چندگانه است (رابطه (۱)). CWT از یک تابع پایه به نام موجک مادر استفاده می‌کند که با کشیده شدن و جابجا شدن، سیگنال را تحلیل می‌کند. این ویژگی به CWT اجازه می‌دهد تا در فرکانس‌های بالا از موجک‌های فشرده با تفکیک‌پذیری زمانی عالی و در فرکانس‌های پایین از موجک‌های کشیده با تفکیک‌پذیری فرکانسی خوب بهره ببرد [۷].

$$CWT_x(\tau, s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t-\tau}{s} \right) dt \quad (1)$$

در این پژوهش، از موجک تحلیلی مورلت به دلیل شباهت آن به پدیده‌های ضربه‌ای و عملکرد مطلوب در تحلیل سیگنال‌های غیرایستا استفاده شده است. خروجی CWT، اسکالوگرام نام دارد که مربع اندازه ضرایب موجک بوده و چگالی انرژی را در صفحه زمان-مقیاس نمایش می‌دهد. با انتگرال‌گیری از اسکالوگرام در راستای محور مقیاس، می‌توان انرژی لحظه‌ای سیگنال را طبق رابطه (۲) استخراج کرد که در آن C_ψ ثابت نرمال‌سازی است که وابسته به موجک مادر می‌باشد [۲].

$$E(t=t_0) = \frac{1}{C_\psi} \int |CWT_x(t_0, s)|^2 \frac{ds}{s^2} \quad (2)$$

۳-۲ تجزیه مود تجربی، تجزیه مود متغیر و تبدیل هیلبرت

۱- **تجزیه مود تجربی (EMD):** تجزیه مود تجربی یک روش تطبیقی و داده-محور است که سیگنال را به مجموعه‌ای از توابع نوسانی به نام توابع مود ذاتی تجزیه می‌کند. هر تابع مود ذاتی یک مولفه تقریباً تک‌فرکانس را نشان می‌دهد. برخلاف روش‌های مبتنی بر تبدیل، تجزیه مود تجربی به هیچ تابع پایه از پیش تعیین‌شده‌ای نیاز ندارد و توابع پایه را مستقیماً از خود سیگنال استخراج می‌کند. با این حال این روش نیز از تداخل مودها رنج می‌برد و در سیگنال‌های نویزی عملکرد مطلوبی ندارد [۸].

۲- **تجزیه مود متغیر (VMD):** تجزیه مود متغیر یک روش نسبتاً جدید و قدرتمند برای تجزیه سیگنال است که بسیاری از محدودیت‌های EMD را هدف قرار داده است. VMD یک مدل تغییراتی کاملاً ذاتی و غیر بازگشتی است که سیگنال ورودی را به مجموعه‌ای از مودهای مشخصه با پهنای باند محدود تجزیه می‌کند. برخلاف EMD که به صورت بازگشتی و محلی عمل می‌کند، VMD تمام مودها را به صورت همزمان و به طور متمرکز پیدا می‌کند. این روش با محدود کردن فرکانس مرکزی هر مود حول یک مقدار مشخص، به طور مؤثری مشکل تداخل مودها را حل می‌کند. الگوریتم VMD بر اساس حل یک مسئله بهینه‌سازی تغییراتی محدود شده فرموله شده است. تابع هدف در این مسئله، کمینه کردن مجموع پهنای باند تخمین زده شده برای تمام مودها است، در حالی که مجموع این مودها سیگنال اصلی را بازسازی کند. VMD به دلیل ماهیت بهینه‌سازی و غیر بازگشتی خود، در مقایسه با EMD مقاومت بیشتری در برابر نویز دارد و مشکل تداخل مودها را به طور قابل توجهی کاهش می‌دهد [۹].

۳- **تبدیل هیلبرت:** پس از تجزیه سیگنال، طبق رابطه (۳) تبدیل هیلبرت بر روی تابع مود ذاتی منتخب $x(t)$ اعمال می‌شود تا سیگنال تحلیلی $z(t)$ آن به دست آید (رابطه (۴)).

$$\hat{x}(t) = \mathcal{H}\{x(t)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau \quad (3)$$

$$z(t) = x(t) + j\hat{x}(t) = A(t)e^{j\theta(t)} \quad (4)$$

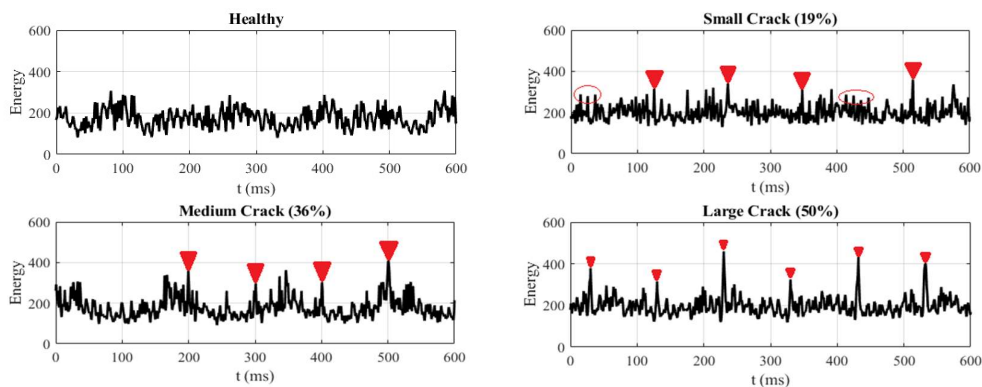
از طریق این سیگنال تحلیلی، می‌توان دامنه لحظه‌ای $A(t)$ و فاز لحظه‌ای $\theta(t)$ سیگنال را با تفکیک‌پذیری بسیار بالا استخراج کرد (رابطه (۵)). چگالی انرژی لحظه‌ای نیز برابر با مربع دامنه لحظه‌ای می‌باشد [۱۰].

$$A(t) = \sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)} \quad , \quad \theta(t) = \tan^{-1} \left(\frac{\hat{x}(t)}{x(t)} \right) \quad (5)$$

۴- نتایج

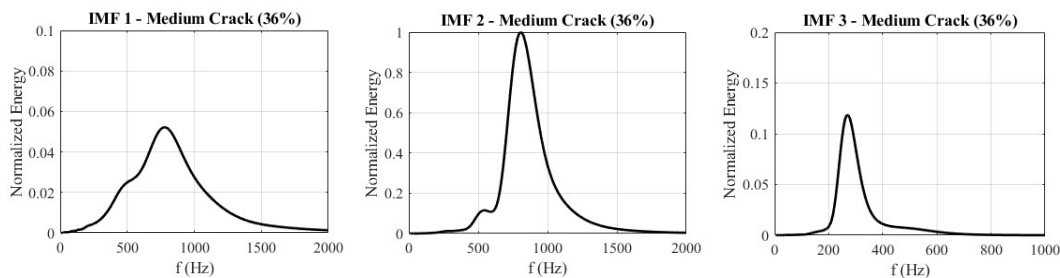
۱-۴ تحلیل نتایج

- **CWT:** نتایج استخراج شده با روش CWT در شکل (۳) نمایش داده شده است. در حالت سالم، سیگنال انرژی نوسانات شبه‌دوره‌ای ناشی از فرآیند درگیری دندان‌ها را نشان می‌دهد. با افزایش شدت ترک، پالس‌های انرژی مشخصی ظاهر می‌شوند. این پالس‌ها که با دوره تناوب ۰.۱ ثانیه (1/10Hz) قابل تشخیص هستند، به وضوح نمایانگر رویدادهای ضربه‌ای ناشی از ورود دندان معیوب به چرخه درگیری می‌باشند. به لطف طبیعت چند-تفکیک‌پذیری، این روش قادر است پالس‌های ضربه‌ای متناوب را حتی در حالت ترک کوچک (۱۹٪) آشکار سازد. هرچند قله‌ها ممکن است واضح نباشند ولی با دقت بیشتر می‌توان قله‌هایی متناوب پیدا کرد.



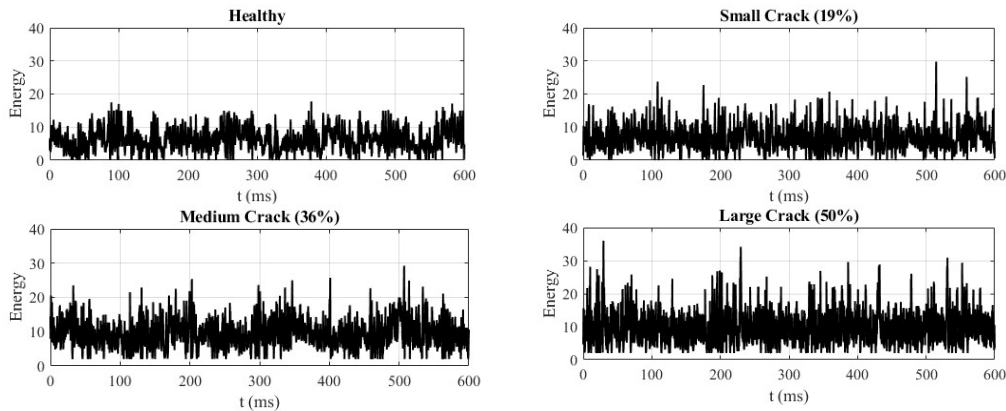
شکل ۳. نمودارهای چگالی انرژی لحظه‌ای استخراج‌شده با روش تبدیل موجک پیوسته برای چهار حالت مختلف سیستم.

- **HHT:** مرحله کلیدی در این روش، انتخاب تابع مود ذاتی است که بیشترین اطلاعات مرتبط با عیب را در خود جای داده است. از آنجایی که ترک در چرخ‌دنده باعث تقویت هارمونیک‌های فرکانس درگیری می‌شود، رویکرد فیزیکی برای انتخاب تابع مود ذاتی، محتوای فرکانسی هر تابع مود است. شکل (۴)، طیف فرکانسی سه تابع مود ذاتی اول را برای حالت ترک متوسط نشان می‌دهد. با مشاهده دقیق‌تر این نمودارها، نتیجه می‌شود که دومین تابع مود ذاتی، بیشترین انرژی را در میان تمامی توابع مود ذاتی دارا می‌باشد. همچنین در این نمودار مشاهده می‌شود که انرژی در حوالی فرکانس ۸۱۰ هرتز متمرکز شده است که با سومین هارمونیک فرکانس درگیری چرخ‌دنده معیوب مطابقت دارد. بنابراین، این تابع مود ذاتی برای تحلیل‌های بعدی انتخاب گردید.



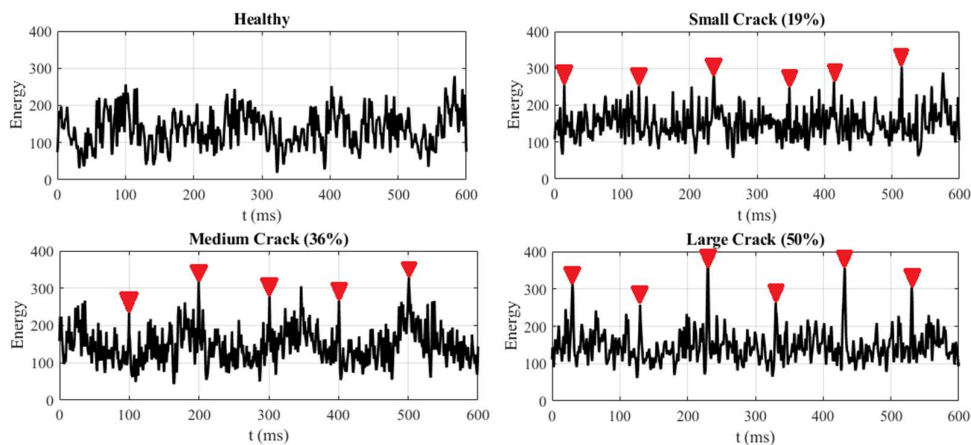
شکل ۴. نمودارهای طیف فرکانسی توابع مود ذاتی اول تا سوم برای حالت سالم ترک متوسط (۳۶٪).

پس از انتخاب مود عیب، چگالی انرژی لحظه‌ای آن با استفاده از تبدیل هیلبرت محاسبه می‌شود و نتایج در شکل (۵) نمایش داده شده‌اند. با بررسی نتایج، می‌توان فهمید بر خلاف روش CWT، چگالی انرژی لحظه‌ای، پالس‌های ضربه‌ای متناوب و واضحی را نشان نمی‌دهد. این نمودارها ظاهری نویزی و پراکنده دارند که تشخیص بصری عیب را دشوار می‌سازند. این پدیده به مشکل شناخته‌شده تداخل مودها در تجزیه مود تجربی نسبت داده می‌شود که در آن ممکن است یک تابع مود ذاتی، حاوی نوسانات از منابع مختلف فیزیکی باشد.



شکل ۵. نمودارهای چگالی انرژی لحظه‌ای استخراج‌شده با روش تبدیل هیلبرت-هوانگ برای چهار حالت مختلف سیستم.

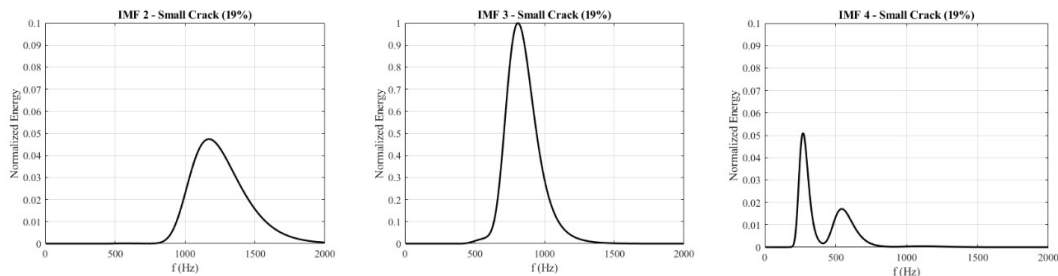
• **EMD + CWT:** در ابتدا، برای محاسبه انرژی لحظه‌ای توابع مود ذاتی که از طریق روش تجزیه مود تجربی استخراج شده بودند، از روش مرسوم تبدیل هیلبرت-هوانگ استفاده شد. این روش به صورت نظری، پوش سیگنال و انرژی لحظه‌ای را برای سیگنال‌های تک‌مولفه‌ای به خوبی استخراج می‌کرد. با این حال، در عمل مشاهده گردید که به دلیل وجود پدیده تداخل مودها در توابع مود ذاتی، سیگنال حاصل از تبدیل هیلبرت دارای نوسانات شدید و فاقد وضوح کافی برای شناسایی دقیق ضربه‌های ناشی از عیب بود. برای غلبه بر این محدودیت، یک رویکرد ترکیبی نوین اتخاذ گردید. در این روش، پس از انتخاب مود عیب، به جای استفاده از تبدیل هیلبرت، از تبدیل موجک پیوسته برای تحلیل زمان-فرکانس مود عیب استفاده شد. مزیت این رویکرد این بود که تبدیل موجک برخلاف تبدیل هیلبرت، قابلیت تحلیل چند-تفکیک‌پذیری داشت که موجب می‌شد نتایج بسیار واضح‌تر شوند.



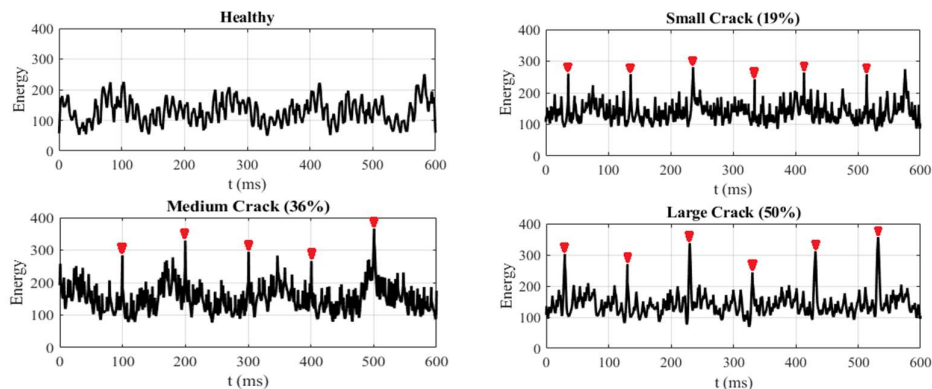
شکل ۶. نمودارهای چگالی انرژی لحظه‌ای استخراج‌شده با روش ترکیبی EMD و CWT برای چهار حالت مختلف سیستم.

با تحلیل نمودارهای بدست آمده (شکل ۶)) می‌توان فهمید نتایج مشابه روش تبدیل موجک پیوسته هستند، ولی در این روش، قله‌ها وضوح بیشتری دارند، به طوری که در مراحل اولیه می‌توان قله‌هایی با تناوب ۰.۱ ثانیه یافت.

• **VMD + CWT**: به دنبال حل مشکل تداخل مودها در EMD و دسترسی به نتایج با کیفیت بالا، روش ترکیبی پیشنهاد می‌شود. در این پژوهش، از ترکیب VMD و CWT برای استخراج چگالی انرژی لحظه‌ای استفاده شده است. این رویکرد ترکیبی، با حذف مؤثر نویز و جداسازی دقیق مؤلفه عیب، امکان استخراج چگالی انرژی لحظه‌ای با حساسیت و قابلیت اطمینان بسیار بالا را فراهم می‌کند. نتایج حاصل از این روش در شکل (۸) عملکرد بسیار خوبی را در تشخیص عیوب نشان می‌دهد. با تجزیه سیگنال به مودهای فیزیکی معنادار و انتخاب مود حاوی اطلاعات عیب (شکل (۷))، توانسته است پالس‌های ضربه‌ای را با وضوح بالا استخراج کند. این روش به دلیل حل مشکل تداخل مودها، حتی در حالت ترک ۱۹٪ نیز پالس‌های واضحی را نشان می‌دهد که این امر نشان‌دهنده قابلیت تشخیص زودهنگام عیوب است.



شکل ۷. نمودارهای طیف فرکانسی توابع مود ذاتی دوم تا چهارم برای حالت ترک کوچک (۱۹٪).



شکل ۸. نمودارهای چگالی انرژی لحظه‌ای استخراج‌شده با روش ترکیبی VMD و CWT برای چهار حالت مختلف سیستم.

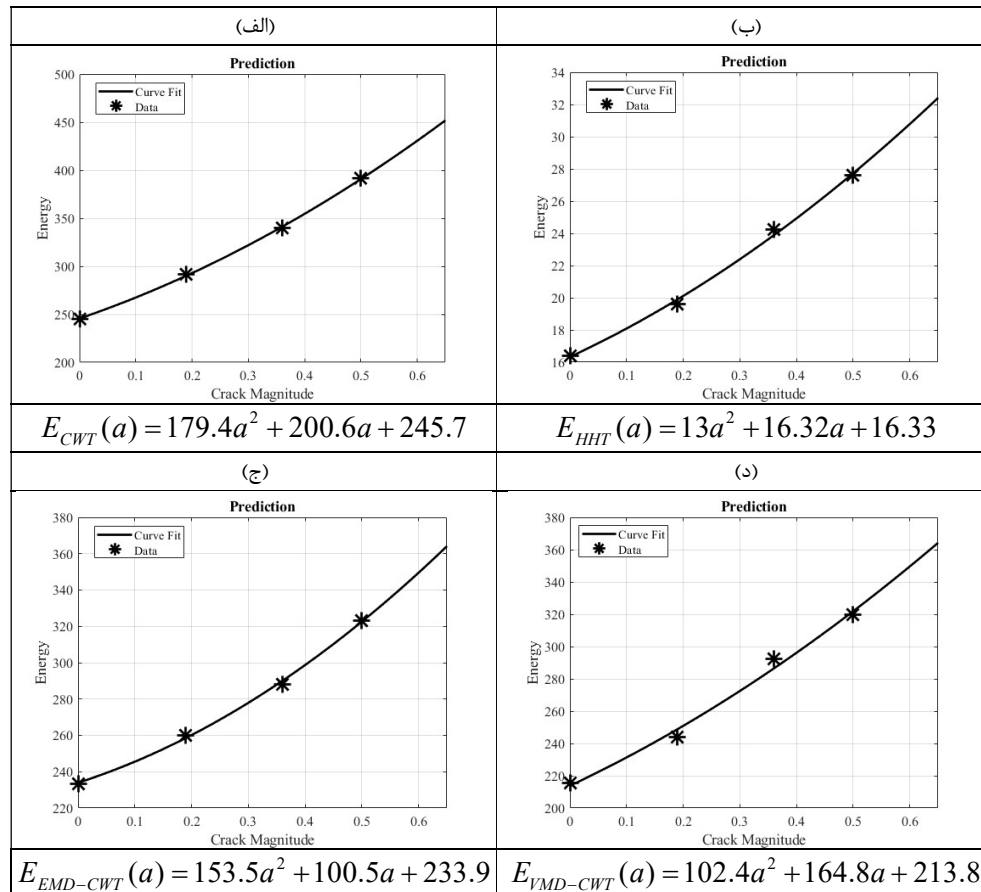
جدول (۱) مقایسه جامعی از روش‌های مورد بررسی ارائه می‌دهد و آن‌ها را بر اساس معیارهایی مانند قابلیت تشخیص زودهنگام عیب، مقاومت به نویز و چالش‌های اصلی ارزیابی می‌کند. برای نمونه، در معیار تشخیص عیب در مراحل اولیه، روش HHT عملکرد ضعیفی نشان داد. در خصوص چالش‌ها، روش EMD با مشکل تداخل مودها مواجه است که استخراج ویژگی‌های دقیق را دشوار می‌سازد؛ با این حال، ترکیب آن با CWT ویژگی‌های معناداری تولید کرد. در مقابل، جایگزینی EMD با VMD (که بر اساس مطالعات اخیر، مشکل تداخل مودها را تا حد قابل توجهی کاهش می‌دهد و مقاومت بیشتری به نویز دارد) منجر به نتایج بهتری در ترکیب با CWT گردید. این رویکرد ترکیبی، گزینه‌ای کارآمد برای کاربردهای صنعتی پیشنهاد می‌شود.

جدول ۱. مقایسه روش‌ها.

معیار ارزیابی	CWT	HHT	EMD + CWT	VMD + CWT
قابلیت تشخیص عیب در مراحل اولیه	دارد.	ندارد.	دارد.	دارد.
وضوح قله‌های انرژی	خوب	ضعیف	خیلی خوب	عالی
کارایی محاسباتی	سریع	سریع	متوسط	متوسط
چالش اصلی	انتخاب موجک مادر	تداخل مودها، حساسیت به نویز	تداخل مودها، حساسیت به نویز	حساسیت به نویز
پیچیدگی پیاده‌سازی	متوسط	پیچیده	پیچیده	پیچیده

۲-۴ کمی‌سازی شدت عیب و پیش‌بینی

برای کمی‌سازی رابطه میان شدت عیب و انرژی استخراج‌شده، یک مدل رگرسیون چندجمله‌ای درجه دو برای تمامی روش‌ها توسعه داده شد. با میانگین‌گیری از دامنه قله‌های انرژی در هر حالت، نمودار پیش‌بینی و مدل تجربی (شکل (۹)) حاصل گردید.



شکل ۹. مدل تجربی بدست آمده براساس چهار روش ذکرشده. (الف) روش CWT. (ب) روش HHT. (ج) روش ترکیبی EMD و CWT. (د) روش ترکیبی VMD و CWT.

۵- نتیجه‌گیری

این پژوهش نشان داد که ویژگی چگالی انرژی لحظه‌ای، شاخص مؤثری برای تشخیص و ارزیابی شدت ترک در چرخ‌دنده‌ها است. از میان چهار روش تحلیل زمان-فرکانس بررسی شده، روش‌های ترکیبی EMD-CWT و VMD-CWT به دلیل حساسیت بالا در شناسایی زود هنگام عیوب، عملکرد برتری داشتند. علاوه بر این، مدل تجربی کمی توسعه‌یافته، امکان تخمین شدت آسیب را در سیستم‌های نگهداری پیش‌بینانه فراهم می‌آورد.

تحلیل‌ها حاکی از آن است که در حالت سالم، نمودار انرژی لحظه‌ای نوسانات یکنواختی نشان می‌دهد؛ اما با بروز ترک، پیک‌های متناوب انرژی با دوره تناوب چرخش محور معیوب (۰.۱ ثانیه) ظاهر می‌شوند و شدت آن‌ها با افزایش عمق ترک به طور قابل توجهی رشد می‌یابد. جدول ۱ مقایسه جامعی از روش‌ها ارائه می‌دهد.

روش‌های ترکیبی و تبدیل موجک پیوسته، توازن مناسبی میان دقت، قابلیت اطمینان و هزینه محاسباتی برقرار می‌کنند و گزینه‌های ایده‌آلی برای کاربردهای صنعتی محسوب می‌شوند. در این میان، روش VMD-CWT به دلیل مقاومت بالاتر به نویز و تشخیص عیب در مراحل اولیه نسبت به بقیه روش‌ها، برای محیط‌های صنعتی پیشنهاد می‌شود.

مراجع

1. Y. Lei, J. Lin, Z. He, and M. J. Zuo, "A review on empirical mode decomposition in fault diagnosis of rotating machinery," *Mechanical systems and signal processing*, vol. 35, no. 1-2, pp. 108-126, 2013.
2. S. Loutridis, "Instantaneous energy density as a feature for gear fault detection," *Mechanical systems and signal processing*, vol. 20, no. 5, pp. 2006, 239-1253.
3. H. Zheng, Z. Li, and X. Chen, "Gear fault diagnosis based on continuous wavelet transform," *Mechanical systems and signal processing*, vol. 16, no. 2-3, pp. 447-457, 2002.
4. Z. Li, X. Yan, C. Yuan, Z. Peng, and L. Li, "Virtual prototype and experimental research on gear multi-fault diagnosis using wavelet-autoregressive model and principal component analysis method," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 25, no. 7, pp. 2589-2607, 2011.
5. H. Mahgoun, F. Chaari, and A. Felkaoui, "Detection of gear faults in variable rotating speed using variational mode decomposition (VMD)," *Mechanics & Industry*, vol. 17, no. 2, p. 207, 2016.
6. Z. Y. B. Chin, Pietro; Smith, Wade; Peng, Zhongxiao (2022). *UNSW TCM gear-crack dataset 2021*, doi: 10.17632/p72x3m92cv.1.
7. S. Mallat, *A wavelet tour of signal processing*. Elsevier, 1999.
8. N. E. Huang *et al.*, "The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis," *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: mathematical, physical and engineering sciences*, vol. 454, no. 1971, pp. 903-995, 1998.
9. K. Dragomiretskiy and D. Zosso, "Variational mode decomposition," *IEEE transactions on signal processing*, vol. 62, no. 3, pp. 531-544, 2013.
10. A. V. Oppenheim, *Discrete-time signal processing*. Pearson Education India, 1999.