

ویژگی های انتشار موج بلند در بلورهای فونونی، اثر غلظت و پراکندگی اجزا در

کامپوزیت های سه جزیی

فرشته عیوضخانی^آ، سرگی ویکتورویچ سوخنین^ب، سید محمد فاروق اشرف سجادی^پ
، سیروان فرهادی^ت

^آ روسیه، نووسیپیرسک، شهرک دانشگاه ، دانشگاه دولتی علوم طبیعی نووسیپیرسک ، دانشکده مکانیک
ریاضی، ۶۳۰۰۹۰، مری

^ب روسیه، نووسیپیرسک، شهرک دانشگاه ، دانشگاه دولتی علوم طبیعی نووسیپیرسک و موسسه
هیدرودینامیک ، دانشکده مکانیک ریاضی، ۶۳۰۰۹۰، پروفیسور

^پ روسیه، نووسیپیرسک، شهرک دانشگاه ، دانشگاه دولتی علوم طبیعی نووسیپیرسک ، دانشکده مکانیک
ریاضی، ۶۳۰۰۹۰، مری

^ت ایران، سنندج، بلوار پاسداران . بلوار دانشگاه ، دانشگاه دولتی کردستان ، دانشکده مهندسی، ۶۶۱۷۷-
۱۵۱۷۵، استادیار

*m.ashrafsajadi@gmail.com

چکیده:

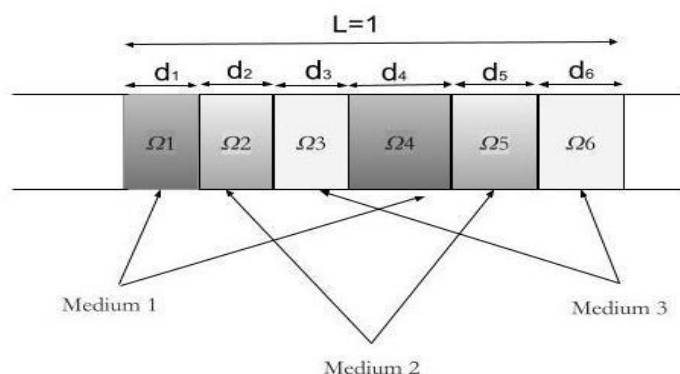
این مقاله به بررسی ویژگی‌های انتشار امواج صوتی با طول موج بلند در بلورهای فونونی تک‌بعدی و سه‌جزئی با پراکندگی چندگانه می‌پردازد. ما یک چارچوب نظری مبتنی بر راه‌حل‌های معادله موج، شرایط مرزی و ارائه می‌دهیم که منجر به یک معادله ماتریس مشخصه می‌شود که رابطه پراکندگی را تعریف می‌کند. شبیه‌سازی‌های عددی، تأثیر توزیع فضایی اجزا و غلظت‌های نسبی بر رفتار موج را بررسی می‌کنند، به‌ویژه با تمرکز بر روابط پراکندگی، سرعت فاز، باندهای عبور و باندهای توقف در رژیم‌های پراکندگی تکی و چندگانه مختلف. یافته‌های کلیدی نشان می‌دهد که حتی با غلظت‌های کل ثابت مواد، تغییر توزیع اجزا به طور قابل توجهی بر پهنای باند عبور و باند توقف تأثیر می‌گذارد. یک کشف مهم این است که حداقل پهنای باند توقف زمانی حاصل می‌شود که غلظت اجزا به طور مساوی بین دو زیر بخش سلول واحد توزیع شود. این مطالعه همچنین حساسیت سرعت فاز در محدوده عدد موج میانی به چیدمان داخلی اجزا را برجسته می‌کند. این نتایج بینش‌های ارزشمندی در مورد کنترل موج صوتی ارائه می‌دهند که به کاربردهایی مانند تست غیر مخرب، فیلتر صوتی و متامواد پیشرفته مرتبط هستند.

کلمات کلیدی: آزمون غیر مخرب (NDT) برای مواد کامپوزیت سه جزئی؛ کریستال فونونی؛ روش آکوستیک؛ سرعت صوت

کامپوزیت .

فرمول بندی :

بیاید یک محیط تناوبی یک بعدی ناهمگن متشکل از سه جزء M_1 ، M_2 و M_3 را در نظر بگیریم و فرض کنیم که یک دوره از زنجیره شامل دو جزء از محیط M_1 با اندازه‌های بدون بعد d_1 و d_4 ، دو جزء از محیط M_2 با اندازه‌های بدون بعد d_2 و d_5 و دو جزء از محیط M_3 با اندازه‌های بدون بعد d_3 و d_6 همانطور که در شکل 1 نشان داده شده است، باشد.



شکل 1: کریستال آوایی شامل زنجیره پلی دیسپرس کامپوزیتی با طول واحد 1

ما یک سیستم کامپوزیت سه تایی شامل سیلیس (محیط 1)، آب (محیط 2) و هوا (محیط 3) را در نظر می گیریم. سلول بنیادی ساختار تناوبی دارای طول مشخصه L است و مختصات مکانی بدون بعد $(x=X/L)$ را معرفی می کنیم. در این مختصات بدون بعد، دوره ساختاری به طور طبیعی واحد می شود. پیکربندی هندسی با ضرایب غلظت d_1 تا d_6 ، مربوط به زیردامنه های $\Omega_6 - \Omega_1$ ، با شرط نرمال سازی $\sum_n d_n = 1$ برای $n = 1, 2, \dots, 6$ مشخص می شود. سرعت صوت، چگالی جرم و اختلال فشار آکوستیک برای اجزای کریستال به ترتیب با (P_i, ρ_i, G_i) نشان داده می شوند ($i=1, 2, \dots, 6$). با فرض اینکه محیط 1 (سیلیس) متراکم ترین جزء است، پارامترهای چگالی نسبی را تعریف می کنیم $\tau_{n1} = \frac{\rho_n}{\rho_1}$ ، $\tau_{31} = \frac{\rho_3}{\rho_1}$ ، $\tau_{21} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$. پارامترهای بدون بعد زیر، توصیف سیستم را کامل می کنند: $\kappa_{12} = \frac{c_1}{c_2}$ ، $\kappa_{13} = \frac{c_1}{c_3}$ ، برای نسبت های سرعت صوت، ω برای فرکانس نوسان دایره ای و $\lambda = \frac{\omega L}{c_1}$ برای فرکانس نوسان بدون بعد.

ویژگی های تقارن

از آنجایی که معادله موج تحت انتقال در یک شبکه کریستالی تناوبی، ثابت است، جواب های آن در کل محیط، تناوبی بودن را نشان می دهند - این مسئله انتقال (مسئله T) را تعریف می کند. در ساختارهای تناوبی یک بعدی، سیستم یک گروه انتقال $\{1T\}$ را در امتداد محور فضایی می پذیرد که توسط یک عملگر تغییر واحد ایجاد می شود. در نتیجه، فضای جواب به زیر فضاهای ثابتی تحت این گروه تجزیه می شود [3]. در این زیر فضاها، توابع $p(x)$ مربوط به یک ξ داده شده (که در آن $-\pi \leq \xi \leq \pi$) در شرایط زیر صدق می کنند:

$$T_1\langle p(x) \rangle \equiv p(x+1) \equiv e^{i\xi} \cdot P(x) \quad (1)$$

در نتیجه، می‌توانیم آنها را به شکل یک بسته موج ابتدایی بیان کنیم [1]:

$$P(x) \cdot e^{i\omega t} = A(x) \cdot e^{i(\omega t + \xi x)}$$

که می‌دهد:

$$P(x) = A(x) \cdot e^{i\xi x}, \quad A(x+1) = A(x) \quad (2)$$

که در آن i واحد موهومی، $A(x)$ نشان دهنده‌ی پوشش دامنه و ξ عدد موج یک بسته موج ابتدایی در محیط مرکب است که تغییر فاز نوسانات بین سلول‌های واحد مجاور گروه انتقال را مشخص می‌کند. از این پس، به مسئله T تحت شرایط (2) به عنوان مسئله $T(\xi)$ اشاره می‌کنیم.

بسته موج ابتدایی (2) ساختار ریزمقیاس یک موج صوتی را که در یک بلور فونونی پراکنده می‌شود، نشان می‌دهد. راه‌حل‌های معادلات (1) و (2) در این شکل بسته موج فقط برای جفت‌های خاصی از فرکانس دایره‌ای ω و عدد موج ξ ($\lambda = \lambda(\xi)$) وجود دارند. برای حل $T(\xi)$ ، کافی است مسئله را در یک سلول واحد از گروه انتقال، مربوط به یک دوره ساختاری، تجزیه و تحلیل کنیم. راه‌حل در کل دامنه را می‌توان با گسترش دوره‌ای راه‌حل سلول واحد از طریق معادله (2) ساخت.

معادلات و شرایط مرزی:

نوسانات فشار آکوستیک حالت پایدار در محیط‌های Ω_1 تا Ω_6 با فرکانس دایره‌ای بدون بعد λ با معادلات حاکم زیر مشخص می‌شوند:

$$\begin{aligned} P_{xx}^{(1)} + \lambda^2 P^{(1)} = 0 \quad ; \quad P_{xx}^{(2)} + \lambda^2 \kappa_{12}^2 P^{(2)} = 0 \quad ; \quad P_{xx}^{(3)} + \lambda^2 \kappa_{13}^2 P^{(3)} = 0 \\ P_{xx}^{(4)} + \lambda^2 P^{(4)} = 0 \quad ; \quad P_{xx}^{(5)} + \lambda^2 \kappa_{12}^2 P^{(5)} = 0 \quad ; \quad P_{xx}^{(6)} + \lambda^2 \kappa_{13}^2 P^{(6)} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

جواب کلی معادله (3) را می‌توان به صورت زیر ارائه کرد:

$$\begin{aligned}
 P^{(1)} &= a_1 e^{i\lambda x} + b_1 e^{-i\lambda x}, P^{(2)} = a_2 e^{i\lambda \kappa_{12} x} + b_2 e^{-i\lambda \kappa_{12} x} \\
 P^{(3)} &= a_3 e^{i\lambda \kappa_{13} x} + b_3 e^{-i\lambda \kappa_{13} x}, P^{(4)} = a_4 e^{i\lambda x} + b_4 e^{-i\lambda x} \\
 P^{(5)} &= a_5 e^{i\lambda \kappa_{12} x} + b_5 e^{-i\lambda \kappa_{12} x}, P^{(6)} = a_6 e^{i\lambda \kappa_{13} x} + b_6 e^{-i\lambda \kappa_{13} x}
 \end{aligned} \tag{4}$$

انتشار امواج صوتی از طریق محیط مرکب تناوبی یک بعدی توسط سه سیستم معادلات جفت شده کنترل می شود: معادلات جنبشی،

دینامیکی و معادلات مرزی. شرایط پیوستگی برای هر دو عامل فشار و سرعت ذرات در فصل مشترک مواد منجر به سیستم معادلات

زیر می شود:

معادلات جنبشی:

$$\begin{aligned}
 P^{(1)}(x = d_1) &= P^{(2)}(x = d_1); \\
 P^{(2)}(x = d_1 + d_2) &= P^{(3)}(x = d_1 + d_2); \\
 P^{(3)}(x = d_1 + d_2 + d_3) &= P^{(4)}(x = d_1 + d_2 + d_3) ; \\
 P^{(4)}(x = d_1 + d_2 + d_3 + d_4) &= P^{(5)}(x = d_1 + d_2 + d_3 + d_4); \\
 P^{(5)}(x = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5) &= P^{(6)}(x = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5).
 \end{aligned}$$

(5-1)

معادلات دینامیکی:

$$\begin{aligned}
 \tau_{21} P_x^{(1)}(x = d_1) &= P_x^{(2)}(x = d_1) ; \\
 \tau_{31} P_x^{(2)}(x = d_1 + d_2) &= \tau_{21} P_x^{(3)}(x = d_1 + d_2); \\
 \tau_{41} P_x^{(3)}(x = d_1 + d_2 + d_3) &= \tau_{31} P_x^{(4)}(x = d_1 + d_2 + d_3); \\
 \tau_{51} P_x^{(4)}(x = d_1 + d_2 + d_3 + d_4) &= \tau_{41} P_x^{(5)}(x = d_1 + d_2 + d_3 + d_4); \\
 \tau_{61} P_x^{(5)}(x = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5) &= \tau_{51} P_x^{(6)}(x = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5).
 \end{aligned} \tag{5-2}$$

معادلات لایه مرزی:

$$P^{(1)}(x=0) e^{I\xi} = P^{(6)}(x=1) \quad ; \quad \tau_{61} P_x^{(1)}(x=0) e^{I\xi} = P_x^{(6)}(x=1) \quad (5-3)$$

با اعمال شرایط مرزی مشخص شده در معادله (5) بر روی جواب عمومی معادله (4)، معادله ماتریسی زیر را بدست می آوریم:

$$M(\lambda) q = 0, \quad (6)$$

که در آن $q = \{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4, a_5, b_5, a_6, b_6\}^T$ بردار ضرایب مجهول است، و یک جواب غیر بدیهی برای مسئله $T(\xi)$ وجود دارد اگر و تنها اگر دترمینان ماتریس مشخصه صفر باشد:

$$Det(M(\lambda)) = 0 \quad (7)$$

روابط پراکندگی

فرکانس های ویژه موجبر در مسئله $T(\xi)$ متناظر با صفرهای تابع تحلیلی $Det[M(\lambda)]$ هستند. برای پارامترهای ثابت d_i ، τ_{ij} و

k_{ij} ، روابط پراکندگی به دست آمده از معادله (7) مجموعه ای کامل از مدهای موجبر $\lambda_n = \lambda_n(\xi)$ را ارائه می دهند. این مدها

شاخه های طیفی متصل $T(\xi)$ را در فضای پارامتری (λ, ξ) تشکیل می دهند.

$$\begin{aligned} F(\lambda, \zeta) = & \cos \cos ((d_1 + d_4)\lambda) \sin \sin ((d_2 + d_5)\lambda k_{12}) \\ & \sin \sin ((d_3 + d_6)\lambda k_{13}) (k_{12} k_{13}^3 \tau_{21}^3 \tau_{31} + k_{12}^3 k_{13} \tau_{21} \tau_{31}^3) \\ & + \sin \sin ((d_1 + d_4)\lambda) \cos \cos ((d_2 + d_5)\lambda k_{12}) \\ & \sin \sin ((d_3 + d_6)\lambda k_{13}) k_{12}^2 \tau_{21}^2 (k_{13}^3 \tau_{31} + k_{13} \tau_{31}^3) \\ & + \sin \sin ((d_1 + d_4)\lambda) \sin \sin ((d_2 + d_5)\lambda k_{12}) \\ & \cos \cos ((d_3 + d_6)\lambda k_{13}) k_{13}^2 \tau_{31}^2 (k_{12}^3 \tau_{21} + k_{12} \tau_{21}^3) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 & - \sin \sin (d_1 \lambda) \sin \sin (d_4 \lambda) \sin \sin (d_2 \lambda k_{12}) \sin \sin (d_5 \lambda k_{12}) \cos \cos (d_3 \lambda k_{13}) \\
 & \cos \cos (d_6 \lambda k_{13}) (k_{13} \tau_{31})^2 \\
 & * \sin \sin (d_3 \lambda k_{13}) \sin \sin (d_6 \lambda k_{13}) (k_{13}^2 \tau_{21}^2 - k_{12}^2 \tau_{31}^2)^2 \\
 & + 2(k_{12} \tau_{21} k_{13} \tau_{31})^2 (\cos \cos (\zeta) - \cos \cos ((d_1 + d_4) \lambda) \cos \cos ((d_2 + d_5) \lambda k_{12}) \\
 & \cos \cos ((d_3 + d_6) \lambda k_{13})) = 0
 \end{aligned}$$

ساختار کامل نوار، شامل تمام باندهای عبور $\{n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) و باندهای توقف، به طور کامل توسط معادله (8) مشخص می‌شود. مد اساسی مرتبط با باند عبور با کمترین فرکانس ($n=1$) مد خزشی نامیده می‌شود که با طول موج‌هایی فراتر از مقیاس ناهمگنی‌های متوسط مشخص می‌شود.

با بسط معادله (8) در یک سری تیلور در حدود $\lambda=0$ و حفظ عبارات تا مرتبه دوم در λ ، رابطه پراکندگی تقریبی زیر را برای مد خزشی فرکانس پایین به دست می‌آوریم:

$$\lambda(\xi) = \frac{\sqrt{2(1 - \cos(\xi))}}{\sqrt{(d_1 + d_4 + (d_2 + d_5)\tau_{21} + (d_3 + d_6)\tau_{31}) \left(d_1 + d_4 + \frac{(d_2 + d_5)\kappa_{12}^2}{\tau_{21}} + \frac{(d_3 + d_6)\kappa_{13}^2}{\tau_{31}} \right)}}$$

(9)

برای مقادیر بزرگ ξ ، سرعت موج صوتی را می‌توان مستقیماً از معادله (9) تعیین کرد و نتیجه می‌شود:

$$C_{phase}(\kappa, \tau, \xi) = \frac{\lambda(\kappa, \tau, \xi) \cdot C_1}{L}$$

$$= \frac{\sqrt{2(1 - \cos(\xi))} \cdot \frac{C_1}{L}}{\sqrt{(d_1 + d_4 + (d_2 + d_5)\tau_{21} + (d_3 + d_6)\tau_{31}) \left(d_1 + d_4 + \frac{(d_2 + d_5)\kappa_{12}^2}{\tau_{21}} + \frac{(d_3 + d_6)\kappa}{\tau_{31}} \right)}}$$

(10)

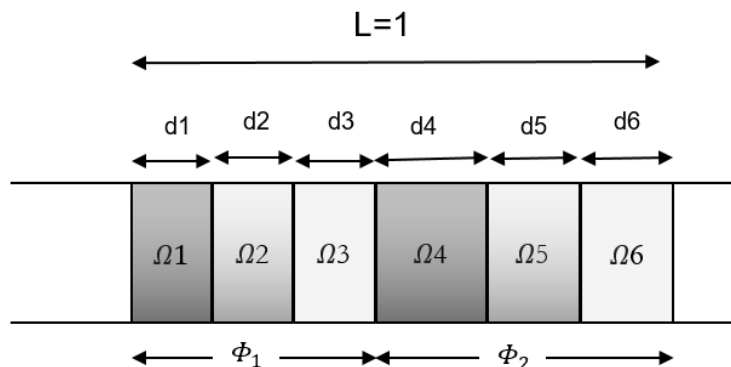
در مرحله بعد، رابطه پراکندگی پیکربندی‌های کریستالی چند پراکندگی و تک پراکندگی را در غلظت‌های مختلف اجزا مقایسه می‌کنیم.

شبیه‌سازی‌های عددی:

تحلیل مقایسه‌ای روابط پراکندگی در بلورهای فونونی سه‌تایی: پیکربندی‌های تک‌پراکنده در مقابل چند پراکنده در غلظت‌های ثابت اجزا

برای راحتی، فرض می‌کنیم که بلور از دو زیر بخش، Φ_1 و Φ_2 ، تشکیل شده است که ساختار یکسانی دارند اما غلظت‌های متفاوتی دارند (شکل ۲). در مرحله بعد، تاثیر تغییر غلظت اجزا در این دو زیربخش را بر منحنی پراکندگی بدون بعد موج-فرکانس برای موج خزنده بررسی می‌کنیم. موارد مختلف مورد تجزیه و تحلیل در جدول ۱ خلاصه شده‌اند. جدول نشان می‌دهد که مطالعه با غلظت صفر در زیربخش 2Φ (مورد N1) آغاز می‌شود. این مطالعه به تدریج غلظت اجزای Φ_2 را افزایش می‌دهد (در حالی که به طور متناظر غلظت اجزای 1Φ را کاهش می‌دهد) و از پیکربندی N1 با پراکندگی تکی به N6 منتقل می‌شود، جایی که همه اجزا غلظت‌های برابری دارند. جالب توجه است که مورد N6 عملاً منجر به یک کریستال تک پراکندگی دیگر می‌شود، اما با نصف طول کریستال N1 (از آنجا که زیربخش‌های Φ_1 و Φ_2 در این مورد یکسان می‌شوند). بنابراین، N6 را می‌توان مشابه N1 در نظر گرفت، مگر با طول

کریستال نصف شده در این تحلیل، محیط‌های ۱، ۲ و ۳ به ترتیب به صورت سیلیس، آب و هوا مدل‌سازی شده‌اند. سرعت و چگالی صوت این سه محیط در جدول ۲ ارائه شده است.



شکل ۲. شماتیک تجزیه بلور فونونی به زیربخش‌های Φ_1 و Φ_2 .

جدول ۱: غلظت اجزای کریستالی در کریستال‌های فونونی تک‌پراکنده و چند پراکنده مورد مطالعه

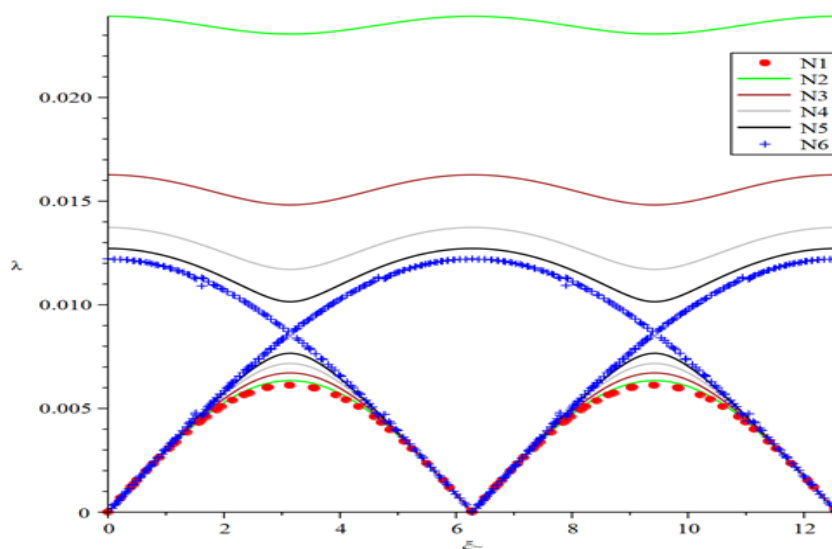
Case number	Subdomains dimensionless size					
	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
N1	0.33333	0.33333	0.33333	0	0	0
N2	0.27777	0.27777	0.27777	0.05555	0.05555	0.05555
N3	0.25	0.25	0.25	0.08333	0.08333	0.08333
N4	0.22222	0.22222	0.22222	0.11111	0.11111	0.11111

N5	0.2	0.2	0.2	0.1333	0.1333	0.1333
N6	0.1666	0.1666	0.1666	0.1666	0.1666	0.1666

جدول 2. سرعت صوت و چگالی حجمی اجزای کامپوزیت

	Silica medium (M1)	Water medium (M2)	Air Medium (M3)
Sound speed (m/s)	6000	1447	337.4
Density (kg/m ³)	2680	999	1.246

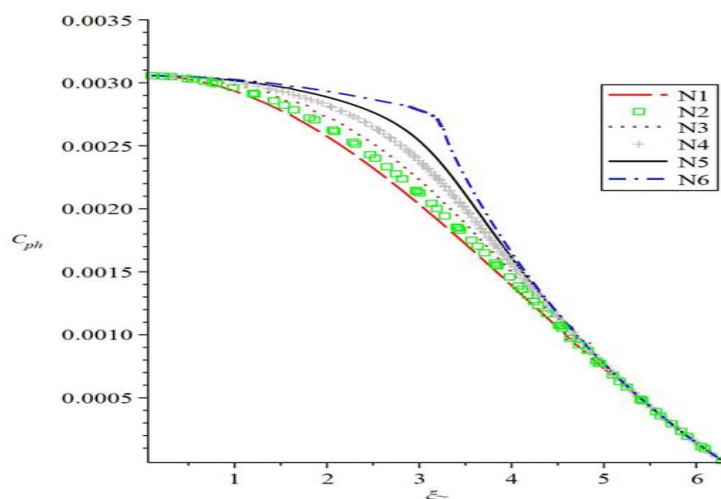
شکل 3 منحنی پراکندگی فرکانس بدون بعد عدد موج (λ - ξ) را برای موج خزنده در شش کریستال فونونی با غلظت‌های مختلف، همانطور که در جدول 1 ذکر شده است، نشان می‌دهد. با افزایش غلظت اجزا در زیر بخش دوم (و در نتیجه، کاهش غلظت زیربخش اول)، پهنای باند عبور موج خزنده به تدریج گسترش می‌یابد و پهنای باند توقف اول باریک می‌شود. هنگامی که غلظت اجزا در هر دو زیربخش برابر می‌شود (حالت N6)، باند توقف بین باندهای عبور اول و دوم ناپدید می‌شود و دو باند عبور را ادغام می‌کند. در این حالت (N6)، منحنی λ - ξ شکلی زنگوله‌ای شکل مشابه حالت N1، البته با طول و عرض بیشتر، به خود می‌گیرد. این تفاوت به این دلیل ایجاد می‌شود که در N6، فرکانس بدون بعد با استفاده از نسبت طول کریستال به طول مولفه اول (که 6 است) تعریف می‌شود، در حالی که در N1، این نسبت 3 است. علاوه بر این، تعریف عدد موج در N6، اختلاف فاز موج عبوری از دو کریستال تک پراکندگی را در نظر می‌گیرد.



شکل ۳. نمودار رابطه پراکندگی به عنوان تابعی از عدد موج برای موج لغزشی در غلظت‌های مختلف اجزا

۳.۲ تاثیر تغییر غلظت زیرمولفه‌ها در یک سلول واحد آکوستیک بر سرعت فاز امواج آکوستیک:

در شکل 4، تغییرات سرعت فاز با عدد موج نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، در مقادیر مرزی عدد موج ($\zeta \rightarrow 0$) یا ($\zeta \rightarrow 2\pi$)، تغییرات در غلظت زیرمولفه‌های Φ_1 و Φ_2 منجر به تغییرات ناچیز و بی‌اهمیت در سرعت فاز می‌شود. این مقادیر عدد موج مربوط به فرکانس‌های بدون بعد حداقل و طول موج‌های بلند است. در این ناحیه، معادله (11) دقت کافی برای پیش‌بینی سرعت فاز را فراهم می‌کند، زیرا غلظت کل اجزا (Φ_1 و Φ_2) به جای غلظت‌های زیربخش‌های جداگانه، قابل توجه است. با این حال، در محدوده عدد موج میانی، تفاوت غیرقابل چشم‌پوشی بین سرعت فاز موارد بررسی شده (N_1 تا N_6) وجود دارد. این محدوده میانی مربوط به فرکانس‌های بدون بعد بالاتر است. اگرچه فرکانس بدون بعد در این محدوده بسیار کوچکتر از واحد باقی می‌ماند، اما فرض طول موج بلند دیگر برقرار نیست و معادله (11) فاقد دقت کافی برای پیش‌بینی سرعت فاز است.



شکل ۴. تغییرات سرعت فاز در کریستال به عنوان تابعی از عدد موج برای غلظت‌های مختلف اجزا در محدوده $(0, \pi/2)$.

نتیجه‌گیری:

- طبق شکل (3)، رابطه پراکندگی به طور قابل توجهی به فیزیک کریستال بستگی ندارد: هنگام تغییر غلظت کریستال از حالت تک‌پراکنده ($N1$) به حالت چند پراکنده ($N6$)، رابطه پراکندگی برای موج خزنده تقریباً ثابت می‌ماند. این نشان می‌دهد که اثر خرد شدن کریستال (چند پراکندگی) ناچیز است.
- طبق شکل (4)، وابستگی رابطه سرعت فاز به تعداد اجزای کریستال ناچیز است که نشان‌دهنده دقت رابطه سرعت فاز است. غلظت‌های مختلف از $N1$ تا $N6$ هیچ تأثیر قابل توجهی بر سرعت فاز موج خزنده ندارند، که همچنین تأیید می‌کند که خرد شدن کریستال هیچ تأثیر قابل توجهی ندارد.
- پیکربندی‌هایی که در آن‌ها توزیع اجزا بین زیربخش‌های اولیه برابر بود (مورد $N6$)، یک تغییر کیفی در ویژگی‌های پراکندگی، از جمله ادغام باندهای عبور اول و دوم و ناپدید شدن باند توقف میانی، نشان دادند که نشان‌دهنده گذار به سمت یک رفتار پراکندگی متفاوت مشابه یک کریستال تک‌پراکنده مقیاس‌بندی شده است.

منابع:

1. L. Brillouin and M. Parodi, Propagation des Ondes dans les Milieux Periodiques, Masson, Paris (1956). [\[Google Scholar\]](#)
2. E. Sanchez-Palencia, Nonhomogeneous Media and Vibration Theory, Springer-Verlag, New York (1980). [\[Google Scholar\]](#)
3. Kushwaha, Manvir S., et al. "Acoustic band structure of periodic elastic composites." Physical review letters 71.13 (1993): 2022. [\[Google Scholar\]](#)
4. Sette, D., 1961. Dispersion and absorption of sound waves in liquids and mixtures of liquids. Akustik I/Acoustics I, pp.275-360. [\[Google Scholar\]](#)
5. Sukhinin, S.V.; Kondratenko, D. Wave transmission through inhomogeneous chain of transparent obstacles. In Proceedings of the International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, Kiev, Ukraine, 10–13 September 2002; pp. 157–162. [\[Google Scholar\]](#)
6. Sukhinin, S.V. Wave propagation and resonance phenomena in inhomogeneous media. J. Appl. Mech. Tech. Phys. **2001**, 42, 411–419. [\[Google Scholar\]](#) [\[CrossRef\]](#)
7. Sukhinin, S.V. Waveguide, anomalous, and whispering properties of a periodical chain of obstacles. Sib. Zh. Indust. Mat. **1998**, 1, 175–198. [\[Google Scholar\]](#)
8. Konstantinov A.P.; Sukhinin, S.V.; Yurkovskiy, V.S. Wave transmission and reflection at the boundary of phononic crystals. J. Phys. Conf. Ser. **2017**, 894, 012094. [\[Google Scholar\]](#) [\[CrossRef\]](#)
9. Saimanova, Z.B.; Sukhinin, S.V.; Zhumadillayeva, A.K. Wave transmission and reflection from the boundary of phononic crystal homogeneous medium. Eurasian J. Math. Comput. Appl. **2020**, 8, 62–75. [\[Google Scholar\]](#) [\[CrossRef\]](#)
10. Saimanova, Z.; Sukhinin, S.; Zhumadillayeva, A.; Mukhametzhanova, A.; Smagulova, A.; Abildaeva, G. Acoustic Method of Quality Control of Two-Component Composite Materials. Applied Sciences. **2021**, 11-24, 11594. [\[Google Scholar\]](#)