

تحلیل فرکانسی تشخیص ترک در تیرها با استفاده از روش ماتریس انتقال

امیدعلی کلی^ا، احمد مامندی^{ب*}

^ا کارشناس ارشد، گروه مهندسی مکانیک، واحد پرند، دانشگاه آزاد اسلامی، پرند، ایران

^ب دانشیار، گروه مهندسی هوافضا، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

*پست الکترونیکی نویسنده مسئول: ahmad.mamandi@iau.ac.ir

چکیده

در این مقاله تحلیل فرکانسی ارتعاشات عرضی تیر اوپلر-برنولی دارای ترک‌های عرضی در امتداد طول تیر مطالعه شده است. مدل‌سازی اتصال دو سمت چپ و راست المان ترک‌دار تیر توسط فنر پیچشی انجام شده است. بر اساس روش جداسازی متغیرها پاسخ هارمونیک برای ارتعاش عرضی تیر در نظر گرفته شده است. با استفاده از تابع کلی شکل مد تیر، ارتباط کمیت‌های جابجایی، شیب، لنگر خمشی و نیروی برشی در دو انتهای یک المان تیر توسط ماتریس انتقال به‌دست آمده‌اند. سپس در محل ترک برای هر المان ترک‌دار تیر کمیت‌های جابجایی، شیب، لنگر خمشی و نیروی برشی در دو سمت چپ و راست ترک به یکدیگر مربوط شده و ماتریس انتقال کلی که مشخصات گره پایانی تیر را به گره اول ربط می‌دهد به‌دست آمده است. معادله‌های فرکانسی ارتعاشات عرضی تیر ترک‌دار برای شرایط مرزی یکسر گیردار-یکسر آزاد و تکیه‌گاه‌های ساده به‌دست آمده و فرکانس‌های تیر ترک‌دار محاسبه شده‌اند. نتایج شبیه‌سازی تحلیل فرکانسی برای تغییرات دامنه بی‌بعد شده دو موج سینوسی انتشار یافته در راستای طولی تیر با فرکانس‌های متفاوت در اثر برخورد به ترک در تیر برحسب فرکانس امواج با استفاده از روش شناسایی تبدیل فوریه ارائه شده‌اند.

کلمات کلیدی: تیر ترک‌دار؛ مدل فنر پیچشی ترک؛ روش ماتریس انتقال؛ تحلیل فرکانسی.

۱- مقدمه

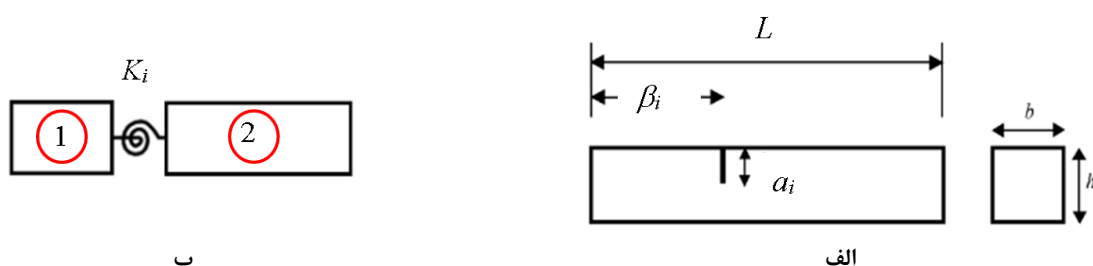
وجود ترک در سازه، دوام و پایداری آن را در معرض خطر قرار می‌دهد. یکی از مسایل مهم در بررسی سازه‌های امروزی که تحت بارگذاری‌های استاتیکی و دینامیکی (متناوب) قرار دارند، مساله وجود ترک و شکست ناشی از آن می‌باشد. از سوی دیگر، بازرسی و عیب‌یابی در قطعات یک دستگاه یا سازه مهندسی برای ارزیابی کارکرد ایمن و تخمین عمر باقی‌مانده آن ضروری می‌باشد. بررسی تغییرات در رفتار دینامیکی یا استاتیکی یکی از روش‌های اطمینان از سلامتی کارکرد و ارزیابی ایمنی قطعه و همچنین پیش‌بینی عمر

باقی‌مانده یک وسیله می‌باشد. معمولاً با ایجاد ترک در یک وسیله، سفتی سازه دستگاه یا قطعه دچار تغییرات محلی شده و در نتیجه رفتار ارتعاشی سازه دستخوش تغییر می‌گردد.

در [۱] تعیین موقعیت عیوب شامل ترک‌ها در سازه‌ها با اندازه‌گیری فرکانس‌های طبیعی سازه بررسی شده است. نظریه یک‌بعدی برای بررسی رفتار دینامیکی تیر اویلر-برنولی ترک‌دار در [۲-۴] ارائه شده است. در [۵] تحلیل سازه‌ای تیر ترک‌دار با استفاده از روش المان محدود انجام شده است. در [۶] تحلیل دینامیکی تیر اویلر-برنولی دارای ترک‌های متقارن برای تعیین شکل مودهای ارتعاشی آن انجام شده است. در [۷] شناسایی ترک در تیرها با استفاده از اندازه‌گیری فرکانس‌های طبیعی آن بررسی شده است. در [۸] تحلیل ارتعاشات آزاد تیر دارای یک ترک لبه‌ای انجام شده است. در [۹] تحلیل ارتعاشات تیر طره‌ای ترک‌دار مورد مطالعه قرار گرفته است. در [۱۰] و [۱۱] شناسایی موقعیت ترک در تیرها با استفاده از فرکانس‌های طبیعی آنها بررسی شده است. در [۱۲] شناسایی ترک در تیرها با استفاده از روش‌های آزمایشگاهی تحلیل مودال و المان محدود انجام شده است. در [۱۳] با استفاده از روش بسته موج فضایی شناسایی ترک در تیر تیموشنکو انجام شده است. برای مطالعه بیشتر به مراجع [۱۴ و ۱۵] ارجاع داده می‌شود.

۲- مدل‌سازی ارتعاشی تیر نازک ترک‌دار

در شکل (۱-الف) یک تیر اویلر-برنولی پیوسته از ماده همگن و همسانگرد با مدول الاستیسیته E ، چگالی ρ ، ضخامت b ، عرض h ، طول L ، سطح مقطع A ، ممان اینرسی دوم سطح مقطع I با n ترک عرضی با اندازه هر ترک به طول a_i در راستای طول تیر نشان داده شده است. ترک‌ها در امتداد طول تیر در موقعیت‌های $\beta_i = \frac{x_i}{L} (= \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ قرار گرفته‌اند به‌طوری‌که $0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n < 1$ می‌توان ترک‌ها را با فنرهای پیچشی مدل نمود (شکل (۱-ب) را ببینید). سختی پیچشی فنر از رابطه زیر محاسبه می‌شود [۷، ۱۳ و ۱۴]



شکل ۱. المان تیر ترک‌دار، الف- تیر دارای ترک عرضی، ب- مدل‌سازی ترک با فنر پیچشی و اتصال دو سمت المان ترک توسط فنر پیچشی.

$$K_i = \frac{Ebh^2}{72\pi f(\eta_i)} \quad (1)$$

که $\eta_i = a_i / h$ اندازه بدون بعد ترک و $f(\eta_i)$ تابع انعطاف پذیری می‌باشد که توسط رابطه زیر بیان می‌شود [۱۳ و ۱۴]:

$$f(\eta_i) = 0.6384(\eta_i)^2 - 1.035(\eta_i)^3 + 3.7201(\eta_i)^4 - 5.1774(\eta_i)^5 + 7.553(\eta_i)^6 - 7.3324(\eta_i)^7 + 2.4909(\eta_i)^8 \quad (2)$$

رابطه (۲) به ازای $\eta_i \leq 0.6$ دارای دقت بسیار خوبی می‌باشد [۱۳ و ۱۴]. معادله حاکم بر ارتعاشات عرضی تیر اویلر-برنولی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

که $w(x, t)$ خیز مکانی-زمانی هر نقطه در سطح مقطع تیر بوده که اندازه گرفته شده از تار خنثای تیر می‌باشد. براساس روش جداسازی متغیرها پاسخ هارمونیک معادله (۳) را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$w(x, t) = Z(x) \cos(\omega t) \quad (۴)$$

به طوریکه $Z(x)$ شکل مد تیر است و با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$Z(x) = c_1(\cos(px) + \cosh(px)) + c_2(\cos(px) - \cosh(px)) + c_3(\sin(px) + \sinh(px)) + c_4(\sin(px) - \sinh(px)) \quad (۵)$$

که $p^4 = \frac{\rho A \omega^2}{EI}$. با استفاده از رابطه (۵) ارتباط جابجایی Z ، شیب $\theta = \frac{dZ}{dx}$ ، ممان خمشی $M = EI \frac{d^2 Z}{dx^2}$ و نیروی برشی $V = EI \frac{d^3 Z}{dx^3}$ در دو انتهای i و $i-1$ از یک المان دلخواه را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} Z \\ \theta \\ M \\ V \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i & C_i/EI & D_i/EI \\ p^4 D_i & A_i & B_i/EI & C_i/EI \\ EI p^4 C_i & EI p^4 D_i & A_i & B_i \\ EI p^4 B_i & EI p^4 C_i & p^4 D_i & A_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \theta \\ M \\ V \end{bmatrix}_{i-1} \quad (۶)$$

یا

$$Z_R = [R_i] Z_L \quad (۷)$$

که $[R_i]$ ماتریس انتقال برای المان i ام تیر است و همچنین داریم:

$$A_i = \frac{\cos(pl_i) + \cosh(pl_i)}{2}, \quad B_i = \frac{\sin(pl_i) + \sinh(pl_i)}{2p} \\ C_i = \frac{-[\cos(pl_i) - \cosh(pl_i)]}{2p^2}, \quad D_i = \frac{-[\sin(pl_i) - \sinh(pl_i)]}{2p^3} \quad (۸)$$

که l_i طول المان i ام تیر می‌باشد. در محل ترک کمیت‌های Z ، M و V پیوسته هستند و تنها شیب θ ، دارای ناپیوستگی است. بنابراین کمیت‌های Z ، M و V در دو سمت چپ و راست ترک را می‌توان به یکدیگر مربوط نمود:

$$\begin{bmatrix} Z \\ \theta \\ M \\ V \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/K_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \theta \\ M \\ V \end{bmatrix}_{i-1} \quad (۹)$$

یا

$$Z_R = [S_i] Z_L \quad (۱۰)$$

که در روابط (۷) و (۱۰) اندیس R و L نشان دهنده سمت راست و چپ ترک می‌باشند. در رابطه (۹)، K_i سختی فنر پیچشی است (رابطه (۱)). ماتریس انتقال کلی $[\bar{H}]$ ، یعنی ماتریسی که مشخصات گره N ام تیر را به گره اول در آن ربط می‌دهد (شکل (۱)) را ببینید، با انجام عملیات ریاضی ضرب کردن، ماتریس‌های انتقال میانی محاسبه می‌شود:

$$[Z]_N = [\bar{H}][Z]_1 \quad (۱۱)$$

$$[\bar{H}] = [R_{n+1}]_{4 \times 4} [S_n]_{4 \times 4} [R_n]_{4 \times 4} [S_{n-1}]_{4 \times 4} \dots [R_2]_{4 \times 4} [S_1]_{4 \times 4} [R_1]_{4 \times 4} \quad (12)$$

که تعریف ماتریس‌های انتقال $[R]$ و $[S]$ در روابط (۷) و (۱۰) ارائه شده‌اند. با اعمال شرایط مرزی مشخص در انتهای تیر معادله $[\tilde{H}][Z] = 0$ به‌دست می‌آید. در هر یک از دو انتهای تیر معمولاً دو پارامتر از چهار پارامتر شرایط مرزی (M, θ, Z, V) برابر با مقدار صفر می‌باشند در نتیجه ماتریس مشخصه $[\tilde{H}]$ به یک ماتریس 2×2 تبدیل شود. در حالت کلی معادله مشخصه ارتعاشات سیستم به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\det[\tilde{H}(\omega, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, K_1, K_2, K_3, \dots)]_{2 \times 2} = 0 \quad (13)$$

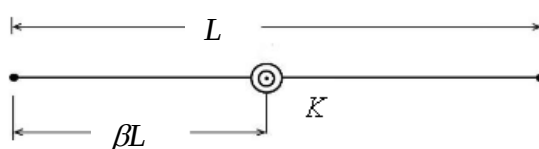
که فرکانس طبیعی تیر است. معادله مشخصه برای تیر با شرط مرزی یکسرگیردار-یکسر آزاد با وجود یک ترک به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{vmatrix} H_{11}^1 + \frac{H_{11}^2}{K} & H_{12}^1 + \frac{H_{12}^2}{K} \\ H_{21}^1 + \frac{H_{21}^2}{K} & H_{22}^1 + \frac{H_{22}^2}{K} \end{vmatrix} = 0 \quad (14)$$

که

$$\begin{aligned} H_{11}^1 &= p^4 C_1 C_2 + p^4 B_1 D_2 + A_1 A_2 + p^4 D_1 B_2, & H_{11}^2 &= EI p^4 A_1 D_2 \\ H_{12}^1 &= p^4 D_1 C_2 + p^4 C_1 D_2 + B_1 A_2 + A_1 B_2, & H_{12}^2 &= EI p^4 B_1 D_2 \\ H_{21}^1 &= p^4 C_1 B_2 + p^4 B_1 C_2 + p^4 A_1 D_2 + p^4 D_1 A_2, & H_{21}^2 &= EI p^4 A_1 C_2 \\ H_{22}^1 &= p^4 D_1 B_2 + p^4 C_1 C_2 + p^4 B_1 D_2 + A_1 A_2, & H_{22}^2 &= EI p^4 B_1 C_2 \end{aligned} \quad (15)$$

که ضرایب $A_i, B_i, C_i, D_i, (i=1, 2)$ از رابطه (۶) محاسبه می‌شوند. البته باید در این روابط L_i جایگزین l_i گردد و همچنین $L_2 = (1 - \beta)L, L_1 = \beta L$ است که β موقعیت بدون بعد ترک در طول تیر می‌باشد (شکل ۲) را ببینید).



شکل ۲. مدل‌سازی المان تیر ترک‌دار با فنر پیچشی.

معادله مشخصه تیر یکسرگیردار-یکسر آزاد با یک ترک در طول دهانه آن به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} 4(1 + \cosh \lambda \cos \lambda) + \frac{\lambda}{K} \{ \sinh \lambda (\cos \lambda + \cosh \lambda e) - \sin \lambda (\cosh \lambda + \cos \lambda e) + 2 \cosh(\lambda \beta) \sin(\lambda \beta) \\ - 2 \cos(\lambda \beta) \sinh(\lambda \beta) - 2 \sin[\lambda(1 - \beta)] \cosh[\lambda(1 - \beta)] + 2 \cos[\lambda(1 - \beta)] \sinh[\lambda(1 - \beta)] \} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

و معادله مشخصه تیر با تکیه‌گاه‌های ساده به‌صورت زیر است:

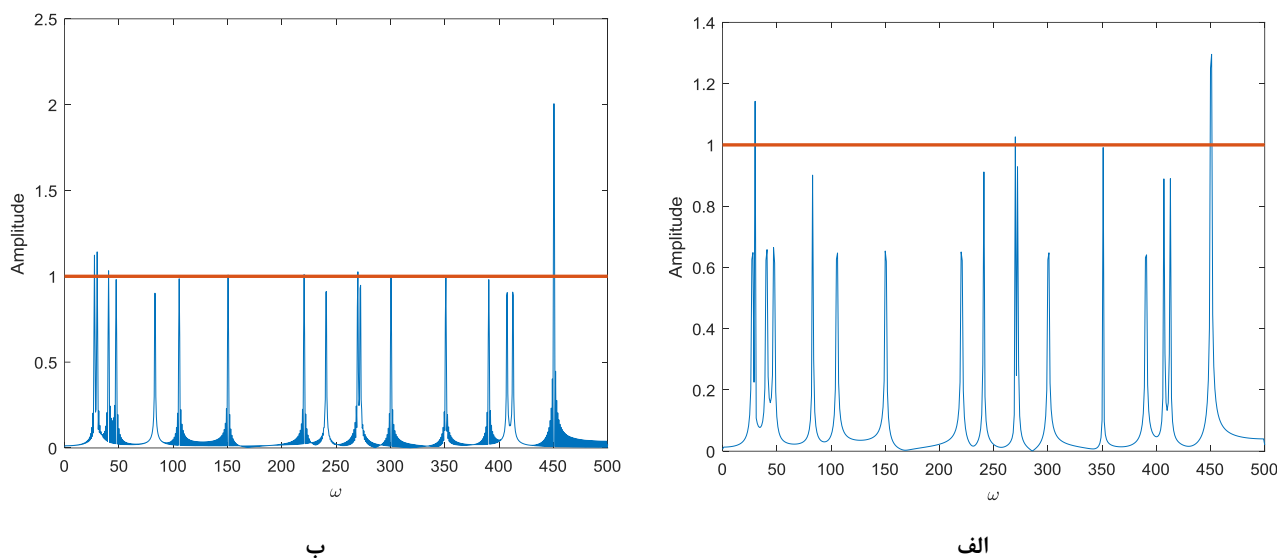
$$4 \sin \lambda \sinh \lambda + \frac{\lambda}{K} \{ \sinh \lambda (\cos \lambda - \cosh \lambda e) - \sin \lambda (\cosh \lambda - \cos \lambda e) \} = 0 \quad (17)$$

به‌طوریکه $\lambda = pL, \beta = L_1 / L, e = 2\beta - 1, \bar{K} = KL / EI$ و L طول تیر می‌باشد. لازم به ذکر است که اگر در روابط بالا مقدار کمیت انعطاف‌پذیری $1/\bar{K}$ برابر با صفر در نظر گرفته شود، معادله‌های مشخصه برای تیر یکسرگیردار-یکسر آزاد و با تکیه‌گاه‌های ساده در حالت بدون ترک به‌دست می‌آیند. از حل مستقیم معادلات (۱۶) و (۱۷) می‌توان فرکانس‌های تیر ترک‌دار را

محاسبه نمود. همچنین، شکل مدهای مربوط به تیر را می‌توان از رابطه (۵) به‌دست آورد. این روش، تحت عنوان روش ماتریس انتقال^۱ نام‌گذاری شده است.

۳- نتایج تحلیل فرکانسی تیر ترک‌دار

در شکل (۳) نتایج تحلیل به کمک روش شناسایی تبدیل فوریه (DFT^2) برای تغییرات دامنه موج سینوسی انتشار یافته برحسب فرکانس موج برای تیر ترک‌دار نشان داده شده است. برای بررسی چگونگی تغییرات دامنه موج ارسالی در راستای طولی تیر در اثر برخورد به یک ترک نمونه، دو موج با فرکانس‌های متفاوت ۱۱۰ Hz و ۲۰۲/۵ Hz در نظر گرفته شده‌اند. نتایج شبیه‌سازی موج انتشاری در تیر دارای ترک نمونه، با استفاده از کد نوشته شده در محیط نرم‌افزار ریاضی MATLAB استخراج شده‌اند. در برخورد موج با ترک مقدار دامنه موج تغییر می‌یابد. علت تغییر دامنه موج را می‌توان در ناپیوستگی هندسی ناشی از وجود ترک در قطعه دانست. از این شکل مشاهده می‌شود که در برخورد موج با ترک در یک موقعیت دلخواه، مقدار دامنه موج بی‌بعد شده از مقدار عددی یک بیشتر می‌گردد. بر اساس این نوع تحلیل عددی برای نمونه مدل‌سازی شده می‌توان به وجود ترک در قطعه پی برد. لازم به ذکر است از این روش در صنعت برای تشخیص وجود ترک در قطعه در روش بازرسی غیرمخرب فراصوتی^۳ (اولتراسونیک) بهره گرفته می‌شود.



شکل ۳. تغییرات دامنه موج سینوسی انتشار یافته برحسب فرکانس برای تیر ترک‌دار، الف- موج سینوسی با فرکانس ۱۱۰ Hz، ب- موج سینوسی با فرکانس ۲۰۲/۵ Hz.

مراجع

1. P. Cawley, R.D. Adams, "The locations of defects in structures from measurements of natural frequencies", *Journal of Strain Analysis* 14(3), 49-87 (1997).
2. P. Gudmundson, "The dynamic behavior of slender structures with cross sectional cracks", *Journal of Mechanics and Physics of Solids* 31, 329-345 (1983).

¹ Transfer matrix method

² Diagnosis Fourier transformation

³ Ultrasonic nondestructive inspection

3. S. Christidesamd, A.D.S. Barr, "One dimensional theory of cracked Bernoulli-Euler beams", *International Journal of Mechanical Sciences* 26, 648-630 (1984).
4. T.G. Chondros, A.D. Dimargonas, J. Yao, "A continuous cracked beam vibration theory", *Journal of Sound and Vibration* 215 (1), 17-34 (1988).
5. G. Gounaris, A. Dimarogonas, "A finite element of a cracked prismatic beam for structural analysis", *Computers and Structures* 28, 309-313 (1988).
6. M.H.H. Shen, C. Pierre, "Natural modes of Bernoulli-Euler beams with symmetric cracks", *Journal of Sound and Vibration* 138 (1), 115-134 (1990).
7. R.Y. Liang, F.K. Choy, J. Hu, "Detection of cracks in beam structures using measurements of natural frequencies", *Journal of the Franklin Institute* 328 (4), 505-518 (1991).
8. M.H.H. Shen, C. Pierre, "Free vibrations of beams with a single edge crack", *Journal of Sound and Vibration* 170, 237-259 (1994).
9. T.G. Chondros, A.D. Dimarogonas, "Vibration of a cracked cantilever beam", *Journal of Vibration and Acoustics* 120(3), 742-746 (1998).
10. S. Chinchalkar, "Detection of the crack location in beams using natural frequencies", *Journal of Sound and Vibration* 247, 429-417 (2001).
11. P.N. Saavedra, L.A. Cuitino, "Crack detection and vibration behavior of cracked beams", *Computers and Structures* 79, 1451-1459 (2001).
12. H. Nahvi, M. Jabbari, "Crack detection in beams using experimental modal data and finite element model", *International Journal of Mechanical Sciences*, 47, 1477-1497 (2005).
13. C.C. Chang, and L.W. Chen, "Vibration damage detection of a Timoshenko beam by spatial Wavelet based approach", *Applied Acoustics* 64 (12), 1217-1240 (2003).
14. M. Mehrjoo, N. Khaji, M. Ghafoory-Ashtiany, "New Timoshenko-cracked beam element and crack detection in beam-like structures using genetic algorithm", *Inverse Problems in Science and Engineering* 22 (3), 359-382 (2014).
15. M. Raghebi, F. Farshidianfar, "Comments on "Detection of multiple cracks using frequency measurements" and suggestion for improvement in solution for damage parameters", *Engineering Fracture Mechanics* 77, 1375-1377 (2010).