

تحلیل آشوبناک و فلاتر بال دوبعدی در جریان مافوق صوت با استفاده از نظریه آیرودینامیکی پیستون

مسعود انبار^ا، احمد مامندی^{ب*}

^ا کارشناس ارشد، گروه مهندسی مکانیک، واحد پرند، دانشگاه آزاد اسلامی، پرند، ایران

^ب دانشیار، گروه مهندسی هوافضا، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

*پست الکترونیکی نویسنده مسئول: ahmad.mamandi@iau.ac.ir

چکیده

در این مقاله با استفاده از نظریه آیرودینامیکی غیرخطی پیستون در رژیم جریان مافوق صوت حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر ارتعاشات غیرخطی و آشوبی آیرولاستیک بال دوبعدی با سفتی غیرخطی درجه سوم در جهت حرکت پیچشی انجام شده است. از نظریه غیرخطی دوشاخگی هاپف برای محاسبه سرعت فلاتر بال با رفتار غیرخطی سازه‌ای و آیرودینامیکی استفاده شده است. سپس با به‌کارگیری روش رانگه-کوتای مرتبه چهارم به کمک نرم‌افزار MATLAB حل عددی معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم برای تعیین پاسخ‌های چرخه حدی پایدار و حرکات آشوبناک سیستم آیرولاستیک بال انجام شده است. اثر تغییر پارامترهای سیستم در سرعت فلاتر بررسی شده است. نتایج به‌دست آمده با مراجع موجود در حالت‌های خاص اعتبار سنجی شده‌اند. نتایج نشان دادند که تعداد و پایداری نقاط تعادل سیستم با افزایش سرعت جریان تغییر می‌کنند. همچنین، در کنار پاسخ ساده چرخه حدی از دوره تناوب ۱، پاسخ‌های دوره تناوب دوتایی و رفتار آشوبی در فلاتر آیرولاستیک سیستم از نوع دوشاخگی با دوره تناوب دوتایی وجود دارد. مشاهده شد که وقتی شرایط اولیه خیلی کوچک باشند، رفتار آشوبی در سیستم فقط زمانی اتفاق می‌افتد که سرعت جریان از سرعت واگرایی خطی بیشتر باشد. علاوه بر این، نواحی سرعت جریان که در آن سیستم دچار رفتار آشوبی می‌شود بسیار باریک می‌باشد. در انتها برای کنترل ارتعاشات حرکت خطی و پیچشی بال نسبت به اغتشاشات اولیه از کنترلر LQR استفاده شده و پاسخ دینامیکی مدار حلقه باز حرکت پیچشی بال نسبت به شرایط اولیه ورودی اغتشاشی به‌دست آمده است.

کلمات کلیدی: تحلیل آشوبی؛ فلاتر بال دوبعدی؛ پاسخ چرخه حدی دوره تناوب ۱؛ پاسخ دوره تناوب دوتایی.

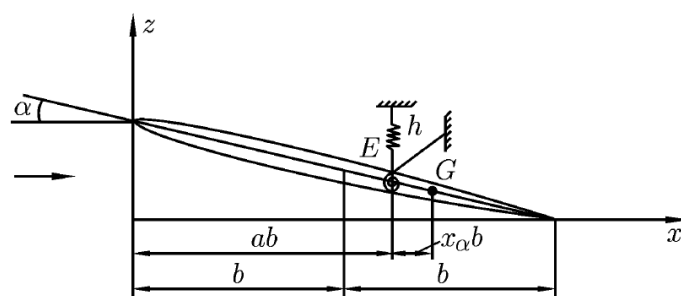
۱- مقدمه

یکی از پدیده‌هایی که باعث شکست در بال و گسیختگی سازه‌های هوایی می‌باشد ناپایداری آیرولاستیک فلاتر است. فلاتر یک ناپایداری دینامیکی می‌باشد که از عمل متقابل بین یک سازه الاستیک (مانند بال) و جریان سیال اطراف سازه ایجاد می‌شود. دامنه و

فرکانس بالای فلاتر می‌تواند سبب خرابی خطرناک در سازه شود. فلاتر بال در جریان‌های مافوق صوت و همچنین در جریان‌های تراکم‌ناپذیر دارای روابط پیچیده خاص خود است. ایجاد جابجایی‌های خمشی و پیچشی عوامل اصلی در رخداد فلاتر بال می‌باشد. پدیده فلاتر به غیر از سازه‌های هوایی بر روی سازه‌های زمینی بلند و پل‌ها نیز ایجاد می‌شود و مشکلاتی را به‌وجود می‌آورد. از آنجاییکه سازه‌های وسایل پرنده انعطاف پذیر می‌باشند، تحت اثر بار تمایل به تغییر شکل دارند. در اثر اعمال نیروهای آیرودینامیکی که مقدار آنها بستگی به شکل سازه و زاویه قرارگیری اجزای آن در مقابل جریان دارد، پدیده‌های مرتبط با آیروالاستیسیته رخ می‌دهند. بنابراین مدل‌سازی آیروالاستیسیته در فرایند طراحی سازه‌های هوایی بسیار پر اهمیت می‌باشد. بررسی رفتار دینامیکی سیستم‌های آیروالاستیک غیرخطی از موضوعات مورد مطالعه و پژوهش در چند دهه اخیر بوده است [۸-۱]. در همین راستا تحلیل رفتار غیرخطی و ناپایداری بالواره‌های (ایرفویل‌ها) در جریان‌های مافوق صوت یکی از بخش‌های این مطالعات است. اصولاً در مطالعات انجام شده در این حوزه دو روش بررسی انتخاب شده است. در روش اول سیستم آیروالاستیک غیرخطی در حوزه زمان و عموماً از طریق روش‌های حل عددی بررسی می‌گردد و در روش دوم در حوزه فرکانس و از طریق تحلیل نوسانات چرخه حدی، به تحلیل سیستم پرداخته می‌شود. فلاتر یک بال دوبعدی با ساختار خطی در بسیاری از مطالعات به دلیل سادگی و کارایی آن مورد بررسی قرار گرفته است. از سوی دیگر وجود بعضی ساختارهای غیرخطی در یک سازه اجتناب‌ناپذیر می‌باشد. بسیاری از پدیده‌های پیچیده می‌توانند در یک سیستم سازه‌ای با توجه به اثرات غیرخطی مانند چرخه محدود فلاتر یک سیستم مستقل و پاسخ زیرهارمونیک یک سیستم با نیروی ارتعاشی اتفاق بیافتد. بنابراین در بیشتر این تحقیقات در مدل‌سازی صورت گرفته برای تعیین سرعت فلاتر از یک مدل سازی ساده استفاده شده که می‌تواند با نتیجه به‌دست آمده در عمل متفاوت باشد. بنابراین با توجه به حساسیت بالای این مسئله، نیاز به یک مدل‌سازی پیچیده‌تر بیشتر احساس می‌شود. برای مطالعه بیشتر در این زمینه به مراجع [۸-۱] ارجاع داده می‌شود.

۲- مدل‌سازی ریاضی و معادلات حاکم بر حرکت

در شکل (۱) یک سطح برای دوبعدی (ایرفویل) با درجات آزادی حرکت خطی و چرخشی، که به‌طور الاستیک به‌وسیله یک فنر با جابجایی خطی و یک فنر پیچشی غیرخطی مقید شده نشان داده شده است. براساس روش انرژی، معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت سطح برآ با سفتی غیرخطی از مرتبه سوم در جهت پیچشی، می‌تواند به‌صورت زیر بیان شود [۹]:



شکل ۱. ایرفویل دو درجه آزادی.

$$\begin{aligned} m\ddot{h} + S_\alpha \ddot{\alpha} + c_h \dot{h} + K_h h &= L, \\ S_\alpha \ddot{h} + I_\alpha \ddot{\alpha} + c_\alpha \dot{\alpha} + K_\alpha \alpha + eK_\alpha \alpha^3 &= M, \end{aligned} \quad (1)$$

که m جرم بال، $S_\alpha = mx_\alpha b$ گشتاور استاتیکی جرم بال حول محور الاستیک، $I_\alpha = m(r_\alpha b)^2$ گشتاور اینرسی بال حول محور الاستیک، c_h و K_h ضرایب میرایی حرکت خطی و چرخشی خطی، c_α و K_α ضرایب سفتی حرکت خطی و چرخشی، e ضریب سفتی غیرخطی بی‌بعد، b نصف طول وتر بال، h جابجایی خطی و α زاویه پیچش (چرخش) است، علامت بالانویس نقطه‌ها بر روی هر کمیت نشان‌دهنده مشتق نسبت به زمان t است، L و M نیرو و گشتاور آیرودینامیکی هستند، و پارامترهای دیگر در شکل (۱) نشان داده شده‌اند.

برای جریان مافوق صوت و ابرصوت، نظریه پیستون به‌طور گسترده برای محاسبه آیرودینامیک اعمالی بر روی سطح برآ استفاده می‌شود. در نظریه آیرودینامیکی پیستون، فشار در یک نقطه فقط به سرعت فروزش آن نقطه نسبت داده می‌شود. تحت این شرایط، فشار بر روی سطوح بالا و پایین یک سطح برآ به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$p = p_{\infty} \left(1 + \frac{k-1}{2} \frac{W}{c_{\infty}} \right)^{2k/(k-1)} \quad (2)$$

که $W = \pm(\partial z / \partial t + U_{\infty} \partial z / \partial x)$ سرعت فروزش (مثبت بر روی سطح بالایی)، p_{∞} ، U_{∞} و c_{∞} به‌ترتیب فشار، سرعت هوا و سرعت صوت جریان غیرمغشوش می‌باشند، k ضریب ایزنتروپیک گاز، و z جابجایی عرضی سطح الاستیک است که به شکل زیر می‌باشد:

$$z(x, t) = -[h(t) + (x - ab)\alpha(t)] \quad (3)$$

با جایگذاری معادله (۳) در معادله (۲) و بسط نتیجه به‌دست آمده از (۲)، اختلاف فشار آیرودینامیکی با صرفنظر کردن از جملات مرتبه بالاتر می‌تواند به‌دست آید:

$$\Delta p(x, t) = -2\rho_{\infty} c_{\infty} [\dot{h}(t) + (x - ab)\dot{\alpha}(t) + U_{\infty} \alpha(t) + (1+k)M_{\infty}^2 \alpha^3 / 12], \quad (4)$$

که M_{∞} عدد ماخ پرواز است، ρ_{∞} چگالی هوا است. نیروی آیرودینامیکی L و گشتاور M می‌توانند از انتگرال‌گیری اختلاف فشار بین سطح بالایی و سطح پایینی ایرفویل به‌دست آیند [۹]

$$L = \int_0^{2b} \Delta p(x, t) dx, \quad M = -\int_0^{2b} \Delta p(x, t)(x - ab) dx, \quad (5)$$

با جایگذاری معادله (۴) در معادله (۵)، عبارت‌های نیروی آیرودینامیکی غیر خطی و گشتاور می‌توانند به‌دست آیند:

$$L = -\frac{\rho_{\infty} U_{\infty} b}{3M_{\infty}} [12\dot{h} + 12(1-a)b\dot{\alpha} + 12U_{\infty}\alpha + M_{\infty}^2 U_{\infty} (1+k)\alpha^3],$$

$$M = \frac{\rho_{\infty} U_{\infty} b^2}{3M_{\infty}} [12(1-a)U_{\infty}\alpha + 12(1-a)\dot{h} + (16 - 24a + 12a^2)b\dot{\alpha} + M_{\infty}^2 U_{\infty} (1+k)(1-a)\alpha^3], \quad (6)$$

با در نظر گرفتن پارامترهای بی‌بعد زیر

$$\xi = h/b, \quad \tau = U_{\infty} t/b, \quad \omega_h = \sqrt{K_h/m}, \quad \omega_{\alpha} = \sqrt{K_{\alpha}/I_{\alpha}},$$

$$\bar{\omega} = \omega_h / \omega_{\alpha}, \quad \mu = m / (4\rho_{\infty} b^2), \quad V = U_{\infty} / (b\omega_{\alpha}), \quad (7)$$

معادلات بی‌بعد حرکت ایرفویل مربوط به معادله (۱) می‌توانند به‌صورت زیر نوشته شوند:

$$\ddot{\xi} + x_{\alpha} \ddot{\alpha} + 2\zeta_h \frac{\bar{\omega}}{V} \dot{\xi} + \left(\frac{\bar{\omega}}{V}\right)^2 \xi = -\frac{1}{\mu M_{\infty}} \left[\alpha + \xi + (1-a)\dot{\alpha} + \frac{1}{12} M_{\infty}^2 (1+k)\alpha^3 \right],$$

$$\frac{x_{\alpha}}{r_{\alpha}^2} \ddot{\xi} + \ddot{\alpha} + 2\zeta_{\alpha} \frac{1}{V} \dot{\alpha} + \frac{1}{V^2} \alpha + \frac{e}{V^2} \alpha^3 =$$

$$\frac{1}{\mu M_{\infty} r_{\alpha}^2} \left[(1-a)\alpha + (1-a)\xi + \left(\frac{4}{3} - 2a + a^2\right) \dot{\alpha} + \frac{1}{12} M_{\infty}^2 (1-a)(1+k)\alpha^3 \right], \quad (8)$$

لازم به ذکر است که نتایج نشان می‌دهند که آیرودینامیک محاسبه شده توسط نظریه پیستون در تحلیل فلاتر هنگامی که عدد ماخ جریان بین ۲ تا ۵ است می‌تواند نتیجه رضایت بخشی داشته باشد.

۱-۲ تحلیل فلاتر بال دوبعدی

برای صحت سنجی نتایج و در شبیه‌سازی‌های انجام شده پارامترهای مورد استفاده در این پژوهش به‌صورت زیر انتخاب شده‌اند

[۹]:

$$\mu = 50, \bar{\omega} = 1.0, x_{\alpha} = 0.25, r_{\alpha}^2 = 0.5, a = 0.5, \zeta_h = \zeta_{\alpha} = 0.1, e = 20, M_{\infty} = 3,$$

با در نظر گرفتن $x_1 = \xi, x_2 = \alpha, x_3 = \dot{\xi}, x_4 = \dot{\alpha}$ معادله (۷) به‌صورت دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول به شکل فضای حالت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_4, \\ \dot{x}_3 &= -\frac{8}{\mathcal{N}^2}x_1 + \left(\frac{2}{\mathcal{N}^2} - \frac{1}{105}\right)x_2 - \left(\frac{8}{35V} + \frac{1}{105}\right)x_3 + \left(\frac{2}{35V} - \frac{19}{3150}\right)x_4 + \left(\frac{40}{\mathcal{N}^2} - \frac{2}{175}\right)x_2^3, \\ \dot{x}_4 &= \frac{4}{\mathcal{N}^2}x_1 + \left(\frac{2}{175} - \frac{8}{\mathcal{N}^2}\right)x_2 + \left(\frac{4}{35V} + \frac{2}{175}\right)x_3 + \left(\frac{34}{3150} - \frac{8}{35V}\right)x_4 + \left(\frac{36}{1750} - \frac{160}{\mathcal{N}^2}\right)x_2^3, \end{aligned} \quad (9)$$

ماتریس ژاکوبی در نقطه تعادل $O(0,0,0,0)$ عبارت است از [۹]:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{8}{\mathcal{N}^2} & \frac{2}{\mathcal{N}^2} - \frac{1}{105} & -\frac{8}{35V} - \frac{1}{105} & \frac{2}{35V} - \frac{19}{3150} \\ \frac{4}{\mathcal{N}^2} & \frac{2}{175} - \frac{8}{\mathcal{N}^2} & \frac{4}{35V} + \frac{2}{175} & \frac{34}{3150} - \frac{8}{35V} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

معادله مشخصه مربوط به ماتریس A عبارت است از:

$$\lambda^4 + p\lambda^3 + q\lambda^2 + r\lambda + s = 0, \quad (11)$$

که پارامترهای این معادله عبارتند از:

$$\begin{aligned} p &= 0.457142\frac{1}{V} - 0.0012698, \quad q = 2.331428\frac{1}{V^2} - 0.0002531\frac{1}{V} - 0.011256, \\ s &= 1.142857\frac{1}{V^4} - 0.007619\frac{1}{V^2}, \quad r = 0.457142\frac{1}{V^3} - 0.0012698\frac{1}{V^2} - 0.0015238\frac{1}{V}, \end{aligned} \quad (12)$$

بر اساس نظریه دوشاخگی هاپف، اگر یک جفت از ریشه‌های موهومی محض وجود داشته باشد و بخش‌های حقیقی دیگر ریشه‌های معادله مشخصه منفی باشند، دوشاخگی هاپف در این نقطه اتفاق می‌افتد. به بیان دیگر، شرایط زیر باید ارضا شوند:

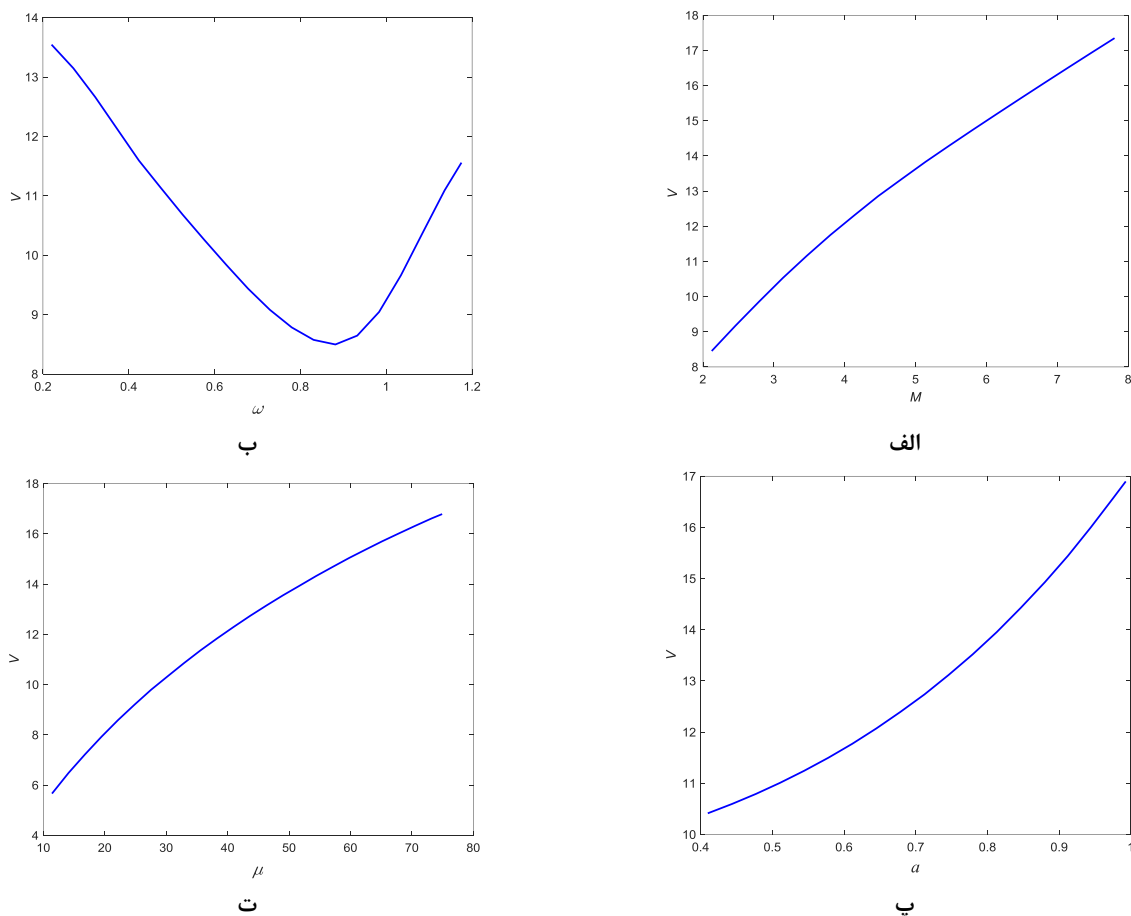
$$p > 0, \quad q > 0, \quad r > 0, \quad s > 0, \quad \Delta = pqr - sp^2 - r^2 = 0 \quad (13)$$

از شرایط (۱۳)، سرعت فلاتر خطی می‌تواند تعیین شود: $V_H = 7.30083$. با استفاده از همین روش، سرعت فلاتر خطی برای پارامترهای مختلف نیز به‌دست می‌آیند.

۳- نتایج تحلیل و بحث در آنها

۳-۱ اثرات تغییر پارامترهای سیستم بر روی سرعت فلاتر بال دوبعدی

سرعت فلاتر برحسب عدد ماخ پرواز که از نظریه آیرودینامیکی پیستون به دست آمده در شکل (۲-الف) نشان داده شده است. واضح است که سرعت فلاتر با افزایش عدد ماخ پرواز افزایش می‌یابد. نمودارهایی که اثرات پارامترهای سیستم را بر روی مرز سرعت فلاتر نمایش می‌دهند در شکل‌های (۲-ب) تا (۲-ت) نشان داده شده‌اند. شکل (۲-ب) نشان می‌دهد که با افزایش نسبت فرکانسی حرکت خطی-پیچشی سرعت فلاتر در ابتدا کاهش می‌یابد و سپس افزایش می‌یابد. با این حال، شکل‌های (۲-پ) و (۲-ت) نشان می‌دهند که سرعت فلاتر با افزایش دیگر پارامترها به صورت یکنواختی افزایش می‌یابد.

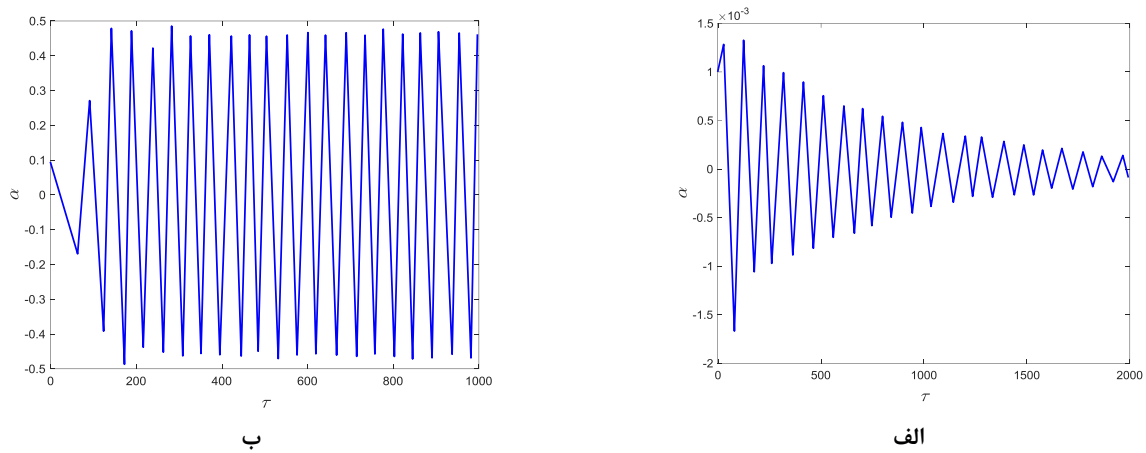


شکل ۲. الف- سرعت فلاتر برحسب عدد ماخ پرواز، ب- سرعت فلاتر برحسب نسبت فرکانسی حرکت خطی-چرخشی، پ- سرعت فلاتر برحسب موقعیت محور الاستیک، ت- سرعت فلاتر برحسب پارامتر جرم.

۳-۱ پاسخ‌های پیچیده غیرخطی سیستم

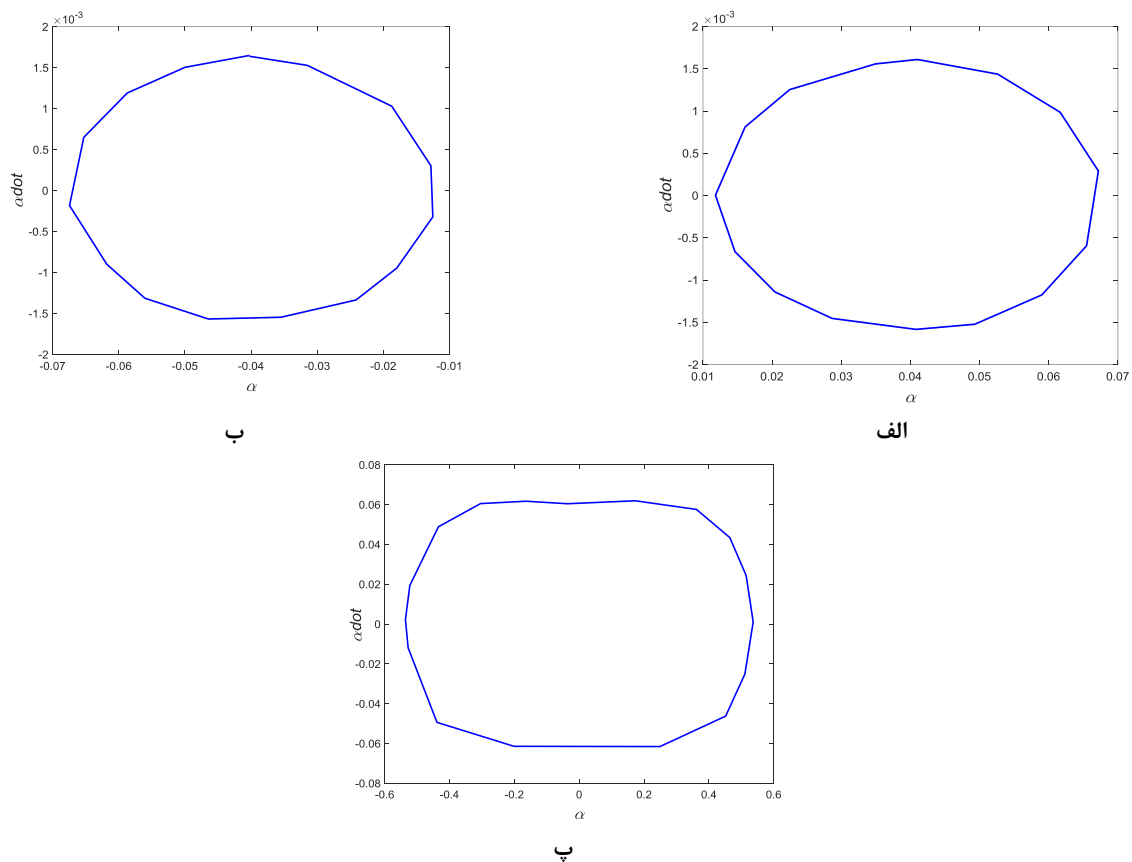
برای حل معادله (۹) از روش رانگه-کوتای مرتبه چهارم با در نظر گرفتن شرایط اولیه $(0, \alpha_0, 0, 0) = (\xi, \alpha, \dot{\xi}, \dot{\alpha})$ استفاده شده است. محاسبات با افزایش تدریجی مقادیر سرعت جریان V انجام می‌شود. مشاهده می‌شود که برای هر شرایط اولیه، نقطه تعادل استاتیکی، یک تمرکز پایدار در زمانی است که سرعت جریان کمتر از $7/30.83$ باشد. درحالی‌که برای $7.30 < V < 11.29$ به نظر می‌رسد یک تمرکز ناپایدار احاطه شده توسط یک چرخه حدی پایدار وجود دارد، به‌طوری‌که دامنه آن می‌تواند به‌طور تقریبی توسط روش‌های غیرخطی دیگری مانند KBM تعیین شود. با افزایش سرعت جریان در محدوده $11.29 < V < 12.25$ ، نقطه تعادل استاتیکی از تمرکز ناپایدار به تمرکز پایدار احاطه شده توسط یک چرخه حدی ناپایدار تغییر می‌کند، به‌طوری‌که در عوض با یک چرخه

حدی پایدار احاطه شده است (همانطور که در شکل (۳) نشان داده شده است). لازم به ذکر است که دامنه هر دو چرخه حدی ناپایدار و پایدار می‌تواند با روش KBM تعیین شود.



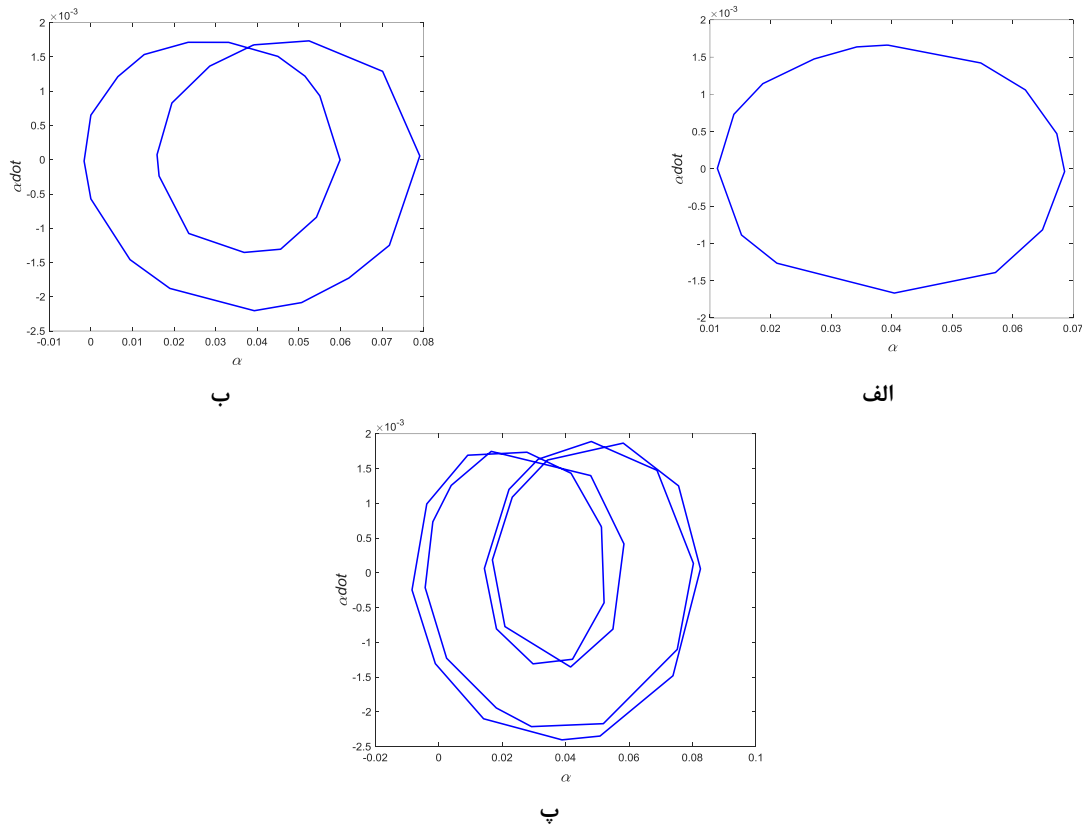
شکل ۳. پاسخ‌های ایرفویل در $V = 11.53$ برای شرایط اولیه مختلف، الف - $\alpha_0 = 0.001$ ، ب - $\alpha_0 = 0.1$

وقتی $V > 12.25$ ، دو حالت دیگر تعادل پایدار رخ می‌دهند و حالت تعادل اصلی ناپایدار می‌شود. هنگامی که سرعت جریان بیشتر از ۱۲/۳۵۸۱ و حرکات پیچیده ایجاد می‌شوند هر سه وضعیت تعادل ناپایدار هستند. به عنوان مثال، با همان سرعت جریان ($V = 12.54$)، چرخه‌های حدی متفاوتی تحت شرایط اولیه متفاوتی ظاهر می‌شوند. به‌طور نمونه، نمودارهای فاز در شکل (۴) نشان داده شده‌اند.



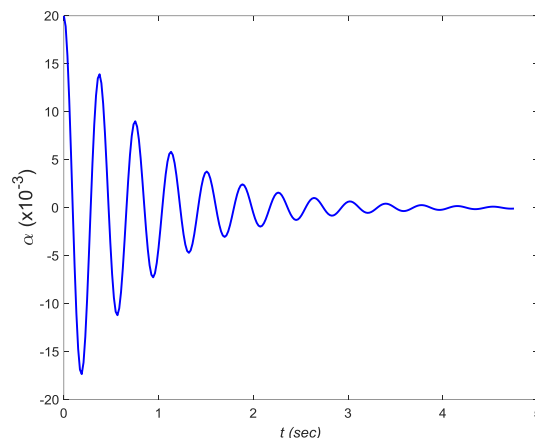
شکل ۴. نمودارهای فاز در سرعت $V = 12.54$ ، الف - $\alpha_0 = 0.001$ ، ب - $\alpha_0 = -0.001$ ، پ - $\alpha_0 = 0.1$

هنگامی که سرعت جریان به تدریج افزایش می‌یابد، حرکات دوره‌ای-دوتایی و آشوبی مشاهده می‌شوند. در محاسبات بعدی، شرط اولیه $\alpha_0 = 0.001$ است. وقتی $12.36 < V < 12.56$ ، پاسخ‌های سیستم از دوره تناوب ۱ هستند (به‌طور نمونه نمودارهای فازی نشان داده شده در شکل (۵-الف)). وقتی $12.56 < V < 12.60$ پاسخ‌های سیستم از دوره تناوب ۲ هستند (به‌طور نمونه نمودارهای فازی نشان داده شده در شکل (۵-ب)). پاسخ‌های دوره تناوب ۴ برای سیستم وقتی که $12.60 < V < 12.61$ است رخ می‌دهند (به‌طور نمونه نمودارهای فازی نشان داده شده در شکل (۵-پ)).



شکل ۵. نمودارهای صفحه فاز با $\alpha_0 = 0.001$ ، الف - $V = 12.55$ (دوره تناوب ۱)، ب - $V = 12.58$ (دوره تناوب ۲)، پ - $V = 12.61$ (دوره تناوب ۴).

لازم به ذکر است که نتایج ارائه شده در شکل‌های (۲) تا (۵) در تطابق کامل با نتایج مرجع [۹] می‌باشد. در ادامه برای کنترل ارتعاشات حرکت خطی و پیچشی بال نسبت به اغتشاشات اولیه از کنترلر LQR استفاده شده است. در شکل (۶) پاسخ دینامیکی مدار حلقه باز حرکت پیچشی بال نسبت به ورودی اغتشاشی اولیه برابر با $\alpha_0 = 0.002$ برحسب زمان توسط کنترلر LQR نشان داده شده است. از این شکل مشاهده می‌شود که با استفاده از کنترلر LQR دامنه ارتعاشات ناشی از اغتشاش اولیه به سرعت کاهش یافته است.



شکل ۶. پاسخ حلقه باز سیستم همراه با کنترلر LQR به ورودی اغتشاشی اولیه.

مراجع

1. X. Wang, X. Yue, H. Dai, J. Yuan, "Analysis of a two dimensional aeroelastic system using the differential transform method," *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 11(6): 061012, 1-10, (2016).
2. H. Daia, X. Yuea, J. Yuana, S. N. Atluri, "A time domain collocation method for studying the aeroelasticity of a two dimensional airfoil with a structural nonlinearity", *Journal of Computational Physics* 270, 214-237(2014).
3. A. Abdelkefi, R. Vasconcellos, A. H. Nayfeh, M. R. Hajj, "Analytical and experimental investigation in to limit-cycle oscillations of an aeroelastic system," *Nonlinear Dynamics* 71, 159-173 (2013).
4. K.W. Chung, C.L. Chan, B.H.K. Lee, "Bifurcation analysis of a two degree-of-freedom aeroelastic system with free-play structural nonlinearity by a perturbation-incremental method," *Journal of Sound and Vibration* 299, 520-539 (2007).
5. F. Liu, Y.R. Yang, "Bifurcations of airfoil in incompressible flow," *Acta Mechanica Solida Sinica* 18(2), 157-163 (2005).
6. H.P. Chu, C.Y. Lo, "Application of the differential transform method for solving periodic solutions of strongly non-linear oscillators," *Computer Modeling in Engineering & Sciences* 77(3&4) 161-172 (2011).
7. Liu, L.P., E.H. Dowell, "The secondary bifurcation of an aeroelastic airfoil motion: effect of high harmonics," *Nonlinear Dynamics* 37(1), 31-49 (2004).
8. H.S.Y. Chan, K.W. Chung, Z. Xu, "A perturbation-incremental method for strongly nonlinear oscillators", *International Journal of Nonlinear Mechanics* 31, 59-72 (1996).
9. G. Zheng, Y. Yang, "Chaotic motions and limit cycle flutter of two-dimensional wing in supersonic flow", *Acta Mechanica Solida Sinica* 21(5), 441-448 (2008).