

## تحلیل اثر شکل لایه پیزوالکتریک بر رفتار مکانیکی تیر برداشت کننده انرژی تحت تحریک جریان گردابی

محمد بیگدلو<sup>۱</sup>، مهدی زمانیان<sup>۲\*</sup>

<sup>۱</sup>ایران، تهران، دانشگاه خوارزمی، دانشکده فنی و مهندسی، کدپستی: ۱۵۷۱۹-۱۴۹۱۱، دانش آموخته کارشناسی  
ارشد مهندسی مکانیک

<sup>۲</sup>ایران، تهران، دانشگاه خوارزمی، دانشکده فنی و مهندسی، کدپستی: ۱۵۷۱۹-۱۴۹۱۱، دانشیار گروه مهندسی  
مکانیک

\*پست الکترونیکی نویسنده مسئول: zamanian@khu.ac.ir

### چکیده

در این مقاله به بررسی اثر شکل‌های هندسی مختلف لایه پیزوالکتریک بر روی رفتار مکانیکی تیر برداشت کننده انرژی که تحت تحریک ارتعاشات ناشی از ریزش گردابه (VIV) قرار دارد، پرداخته شده است. این پدیده با عبور جریان سیال از روی استوانه‌ی صلیبی که به عنوان جرم متمرکز در انتهای آزاد تیر یک سر گیردار نصب شده است، به وقوع می‌پیوندد. نیروهای آیرودینامیکی ایجاد شده در اثر تعامل سازه و سیال با استفاده از معادله نوسانگر و ندرپول، مدل‌سازی شده و معادلات دیفرانسیل حرکت جفت شده نیز با استفاده از اصل همپلتون استخراج می‌شوند، سپس این معادلات با روش مودهای فرضی جداسازی شده و در نهایت با روش عددی حل می‌شوند. در نهایت مقایسه‌ای بر میزان برداشت انرژی و رفتار دینامیکی سیستم، برای سیستم با لایه پیزوالکتریک به شکل‌های مستطیلی، دوزنقه‌ای و مثلثی، انجام می‌گیرد. نتایج نشان می‌دهد که افزایش طول لایه پیزوالکتریک تأثیر به‌سزایی بر افزایش نرخ برداشت انرژی و همچنین گسترش ناحیه لاکین و جابجایی آن به سمت سرعت‌های باد بالاتر دارد.

**کلمات کلیدی:** برداشت انرژی؛ پیزوالکتریک؛ ریزش گردابه؛ رفتار دینامیکی؛ ناحیه لاکین.

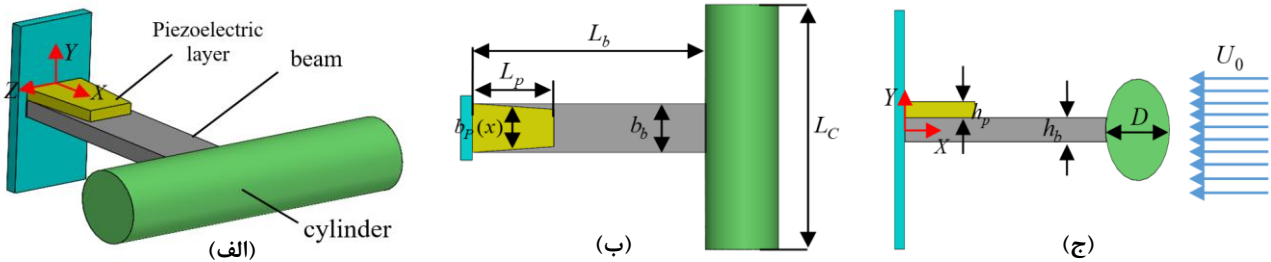
### ۱- مقدمه

در سال‌های اخیر، تقاضا برای استفاده از سنسورهای بی‌سیم و سیستم‌های الکترونیکی قابل حمل، با افزایش چشم‌گیری همراه بوده است. بسیاری از این سیستم‌ها در محل‌هایی با قابلیت دسترسی دشوار قرار دارند، بنابراین تامین انرژی مورد نیاز این سیستم‌ها از منابع انرژی محیطی، مورد توجه محققین قرار گرفته است. از میان این منابع، ارتعاشات مکانیکی به دلیل آنکه احتمال رخ دادنش در بسیاری از سازه‌های مکانیکی وجود دارد، کاربرد بیشتری نسبت به سایرین پیدا کرده است. برداشت کننده‌های انرژی پیزوالکتریک (PEH) [۱] که مبتنی بر ارتعاشات مکانیکی بوده و دارای چگالی توان بالای برداشتی می‌باشند، از اهمیت ویژه‌ای نسبت به دیگر برداشت کننده‌ها برخوردار هستند. از میان رایج‌ترین نوع برداشت کننده‌های انرژی پیزوالکتریک نیز، می‌توان به برداشت کننده‌های ارتعاشاتی ناشی از ریزش گردابه (VIV) اشاره کرد [۲]، که در آن‌ها جریان سیال موازی با راستای تیر از روی استوانه متصل به انتهای آزاد آن عبور داده می‌شود و در نتیجه، اندرکنش بین سازه و سیال رخ می‌دهد و موجب ریزش گردابه‌های نوسانی در قسمت پشت استوانه و ارتعاش تیر عمود بر جهت جریان سیال می‌شود. فرکانس ریزش این گردابه‌ها با افزایش سرعت جریان سیال افزایش می‌یابد،

به گونه‌ای که نهایتاً به فرکانس طبیعی سازه نزدیک شده و بر روی آن قفل می‌شود. در نتیجه سیستم وارد یک چرخه‌ی ارتعاشاتی خود پایدار می‌شود. به ناحیه‌ای از سرعت جریان سیال که این امر در آن رخ می‌دهد، ناحیه لاکین گفته می‌شود. در این سیستم‌ها نیروهای آیرودینامیکی ناشی از ریزش گردابه‌ها شامل نیروی درگ و نیروی لیفت می‌باشد. معادله حرکت سیستم که با نیروی درگ کوپل می‌باشد با استفاده از اصل همیلتون استخراج می‌شود و شکل مودهای ارتعاشی استخراج می‌شوند. از شکل مودهای به دست آمده به عنوان تابع مقایسه‌ای در روش مودهای فرضی استفاده می‌شود و معادلات جداسازی شده‌ی حرکت با استفاده از رابطه‌ی اولر - لاگرانژ استخراج می‌شود. از طرفی معادله حاکم بر ولتاژ خروجی لایه پیزوالکتریک نیز که با سازه کوپل شده است، با اعمال قانون گاوس به دست می‌آید. برداشت کننده‌های متفاوتی توسط محققین پیشنهاد شده است و تاثیر عواملی از قبیل هندسه سازه، ماهیت سازه، خصوصیات دینامیکی سازه، خصوصیات سیال عبوری، نوع برداشت کننده و ... در آن‌ها مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. اما در مطالعات گذشته خلأ بررسی برداشت انرژی از ارتعاشات ناشی از ریزش گردابه، با در نظر گرفتن شکل‌های مختلف لایه پیزوالکتریک مشاهده می‌شود. بنابراین در این تحقیق به بررسی شکل‌های مختلف این لایه پرداخته شده است که موجب بهتر و دقیق‌تر شدن رفتار سیستم شده و در بهینه سازی برداشت انرژی هم کمک به سزایی می‌کند. بنابراین در این پژوهش سعی می‌شود با در نظر گرفتن شکل‌های مختلف لایه‌ی پیزوالکتریک، یک برداشت کننده‌ی انرژی بهینه معرفی شود.

## ۲- مدل سازی و فرمول بندی

همانطور که در شکل (۱) مشاهده می‌شود، سیستم مورد نظر، متشکل از یک تیر یک سر گیردار به طول  $L_b$ ، ضخامت  $h_b$  و پهنای  $b_b$  می‌باشد که به انتهای آزاد آن یک استوانه با طول  $L_c$  و قطر  $D$  متصل شده است. همچنین بر روی یک لایه‌ی پیزوالکتریک که می‌تواند به صورت مستطیلی، دوزنقه‌ای و مثلثی در نظر گرفته شود، با طول  $L_p$ ، ضخامت  $h_p$  و پهنای متغیر  $b_p(x)$  نصب شده است، این لایه از قسمت گیردار تیر شروع شده و طول بخشی از تیر را پوشش می‌دهد.



شکل (۱). (الف): نمای سه یعدی سیستم، (ب): نمای بالای سیستم، (ج): نمای جانبی سیستم

روابط حاکم بر انرژی‌های جنبشی و پتانسیل و همچنین وردش کار نیروهای خارجی که در استخراج معادله حاکم بر حرکت استفاده می‌شوند به صورت زیر خواهند بود: [۳،۴،۵،۶]

$$\begin{aligned} \Pi_k &= \frac{1}{2} \int_0^{L_b+D} M(X) \left( \frac{\partial W(X,t)}{\partial t} \right)^2 dX + \int_0^{L_b+D} \text{Dirac}(X-L_b - \frac{D}{2}) \left( \frac{1}{2} M_C \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} I_C \left( \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial t} \right)^2 \right) dX, \\ \Pi_\varepsilon &= \frac{1}{2} \int_0^{L_b} I_{EZ}(X) W''^2(X,t) dX - \int_0^{L_p} (H(X) - H(X-L_p)) A_p e_{31} \frac{V(t)}{h_p} W'(X,t) dX, \\ \delta \Pi_w &= \frac{1}{4} \rho_f U_0^2 C_{L0} D L_C q(t) \delta W_C - (2\pi S_T \frac{U_0}{D} \gamma \rho_f D^2 L_C) \frac{\partial W_C}{\partial t} \delta W_C \end{aligned} \quad (1)$$

در روابط بالا  $W(X,t)$  جابجایی عرضی تیر،  $M_C$  و  $I_C$  به ترتیب جرم و ممان اینرسی جرمی استوانه حول محور  $Z$ ،  $A_p$ ،  $e_{31}$  و  $V(t)$  به ترتیب گشتاور اول سطح مقطع، ضریب کوپلینگ و ولتاژ خروجی پیزوالکتریک،  $U_0$  و  $\rho_f$ ، چگالی و سرعت جریان سیال،  $C_{L0}$  نیز به ترتیب بیانگر ضریب لیفت استوانه ثابت و  $q(t)$  متغیر نوسانگر ویک است که وابسته به ضریب لیفت می‌باشد. از طرفی  $M(X)$ ،  $I_{EZ}(X)$ ،  $S_T$ ،  $\gamma$ ،  $W_C$  و  $I_C$  به ترتیب جرم تیر بر واحد طول، ممان اینرسی سطح مقطع در طول تیر، پارامتر مرتبط با میانگین ضریب درگ مقطعی، عدد استروهال و جابجایی عرضی استوانه می‌باشند، که به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$M(X) = (m_{bp}) \cdot (H(X) - H(X - L_p)) + m_b \cdot (H(X - L_p) - H(X - L_b)) \quad , \quad I_{EZ}(X) = (H(X) - H(X - L_p)) \cdot I_{Ebp} + (H(X - L_p) - H(X - L_b)) \cdot I_{Eb} \quad , \quad (2)$$

$$\gamma = \frac{C_D}{4\pi S_T} \quad , \quad \omega_s = \frac{2\pi S_T U_0}{D} \quad , \quad W_C(X, t) = W(X, t) \Big|_{X=L_b} + \frac{D}{2} \frac{\partial W(X, t)}{\partial X} \Big|_{X=L_b} = W(X, t) \Big|_{X=L_b + \frac{D}{2}}$$

در این روابط نیز  $C_D$  ضریب درگ بوده و  $\omega_s$  فرکانس ریزش گردابه‌ها است. همچنین  $m_{bp}$ ،  $m_b$ ،  $I_{Ebp}$  و  $I_{Eb}$  به ترتیب جرم بخش تک لایه‌ی تیر، جرم بخش دو لایه‌ی تیر به همراه لایه‌ی پیزوالکتریک، سختی خمشی سطح مقطع قسمت تک لایه‌ی تیر و سختی خمشی سطح مقطع قسمت دو لایه تیر و پیزوالکتریک می‌باشند. معادله حاکم بر نیروی درگ که با شتاب استوانه کوپل می‌باشد، با استفاده از معادله وندریپول به صورت زیر بیان می‌شود [۵،۶]:

$$\ddot{q}(t) + \eta \omega_s [q^2(t) - 1] \dot{q}(t) + \omega_s^2 q(t) = \left( \frac{G}{D} \right) \frac{\partial^2 W_C}{\partial t^2} \quad (3)$$

در حالیکه مقادیر ضرایب به صورت  $G=12$  و  $\eta=0.3$  می‌باشد. همچنین معادله دیفرانسیل حاکم بر ولتاژ خروجی لایه پیزوالکتریک نیز با اعمال قانون گاوس به دست می‌آید [۴]:

$$\int_0^{L_p} E_p d_{31} \frac{\partial^3 W(X, t)}{\partial^2 X \partial t} b_p(X) h_p dX + \frac{d}{dt} \int_0^{L_p} \epsilon_{33} \frac{V(t)}{h_p} b_p(X) dX + \frac{V(t)}{R} = 0 \quad (4)$$

در حالیکه  $E_p$ ،  $\epsilon_{33}$  و  $d_{31}$  به ترتیب ضریب گذردهی، مدول یانگ و ثابت کرنش لایه پیزوالکتریک و  $R$  نیز مقاومت بار می‌باشد. جهت سهولت در تحلیل، متغیرهای بدون بعد زیر را می‌توان به معادلات اعمال کرد [۴]:

$$w = \frac{W}{D} \quad , \quad x = \frac{X}{L_b} \quad , \quad \tau = \frac{t}{T} \quad , \quad T = \sqrt{\frac{m_b L_b^3}{I_{Eb}}} \quad (5)$$

### ۳- شکل مود و فرکانس طبیعی

معادله حاکم بر ارتعاشات آزاد و همچنین شرایط مرزی حاکم بر مسئله، با استفاده از اصل همیلتون و با صرف نظر از عبارات میرایی و نیروهای خارجی به صورت زیر خواهد شد:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \bar{I}_{EZ}(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) + \bar{M}(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial \tau^2} + \frac{M_C}{m_b L_b} \text{Dirac}(x-1 - \frac{D}{2L_b}) \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - \frac{I_C}{L_b^3 m_b} \frac{\partial}{\partial X} \left( \text{Dirac}(x-1 - \frac{D}{2L_b}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \tau^2} \right) = 0, \quad (6)$$

$$w \Big|_{x=0} = 0 \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=\frac{L_b+D}{L_b}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Big|_{x=\frac{L_b+D}{L_b}} = 0$$

با فرض پاسخ ارتعاشات آزاد سیستم به صورت  $w(x, t) = \varphi(x) e^{i\omega\tau}$ ، و جایگذاری آن در معادله بالا:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( \bar{I}_{EZ}(x) \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \right) - \omega^2 \bar{M}(x) \varphi(x) - \omega^2 \frac{M_C}{m_b L_b} \text{Dirac}(x-1 - \frac{D}{2L_b}) \varphi(x) + \omega^2 \frac{I_C}{L_b^3 m_b} \frac{d}{dx} \left( \text{Dirac}(x-1 - \frac{D}{2L_b}) \frac{d}{dx} \varphi(x) \right) = 0, \quad (7)$$

$$\varphi \Big|_{x=0} = 0 \quad , \quad \frac{d\varphi}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \quad , \quad \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \Big|_{x=1 + \frac{D}{L_b}} = 0 \quad , \quad \frac{d^3 \varphi}{dx^3} \Big|_{x=1 + \frac{D}{L_b}} = 0$$

معادله (۷) را می‌توان با استفاده از روش گلرکین حل کرد. لذا پاسخ سیستم به صورت  $\varphi(x) = \sum_{i=1}^N c_i \psi_i(x)$  فرض می‌شود، که در

آن  $\psi_i(x)$  همان شکل مودهای ارتعاش آزاد تیر بدون لایه‌ی پیزوالکتریک و استوانه در انتها می‌باشد. با جایگذاری فرض مربوطه در معادله (۷) و سپس ضرب طرفین آن در  $\psi_j(x)$  و انتگرالگیری از  $x=0 \dots L_b + D$  و در نهایت مساوی صفر قرار دادن دترمینان ضرایب، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای مورد نظر محاسبه می‌شود. در ادامه از شکل مودهای به دست آمده به عنوان تابع مقایسه‌ای در روش مودهای فرضی استفاده شده و معادله ارتعاشات اجباری سیستم با استفاده از رابطه‌ی اولر-لاگرانژ به دست می‌آید. بنابراین، پاسخ ارتعاشات عرضی سیستم به صورت  $w(x, \tau) = \varphi(x) \cdot P(\tau)$  فرض شده و در روابط انرژی جنبشی و پتانسیل به دست آمده در (۱) به صورت زیر جایگذاری می‌شود:

$$\Pi_k = \frac{D^2 L_b}{2T^2} \int_0^1 \left( M(X) \Big|_{X=L_b x} \left( \varphi(x) \cdot \frac{dP(\tau)}{d\tau} \right)^2 dx + \left[ \frac{1}{2} \frac{M_c D^2}{T^2} \left( \varphi(x) \cdot \frac{dP(\tau)}{d\tau} \Big|_{x=1+\frac{D}{2L_b}} \right)^2 + \frac{D^2}{2T^2 L_b^2} I_c \left( \frac{d\varphi(x)}{dx} \cdot \frac{dP(\tau)}{d\tau} \right)^2 \Big|_{x=1} \right] \right), \quad (8)$$

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \left( \frac{D^2}{L_b^3} \right) \int_0^1 I_{EZ}(X) \Big|_{X=L_b x} \left( \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \cdot P(\tau) \right)^2 dx - \frac{e_{31} V(\tau)}{h_p} \frac{D}{L_b} \int_0^{\frac{L_p}{L_b}} A_p \left( H(x) - H(x - \frac{L_p}{L_b}) \right) \left( \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \cdot P(\tau) \right) dx$$

طبق رابطه اولر-لاگرانژ می‌توان نوشت [۳]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(\Pi_k - \Pi_t)}{\partial \dot{P}(\tau)} - \frac{\partial(\Pi_k - \Pi_t)}{\partial P(\tau)} = \frac{\partial \Pi_w}{\delta P(\tau)} \quad (9)$$

با جایگذاری معادلات انرژی جنبشی و پتانسیل (۸) و همچنین معادله وردش کار نیروهای خارجی (۱) در رابطه (۹) و در نهایت تقسیم طرفین معادله به دست آمده بر ضرب  $\ddot{P}(\tau)$ ، معادله جداسازی شده حاکم بر حرکت به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{d^2 P(\tau)}{d\tau^2} + C_{eq} \frac{dP(\tau)}{d\tau} + \omega_n^2 P(\tau) - \alpha V(\tau) = F_{eq} q(\tau) \quad (10)$$

که در آن:

$$M_{eq} = \frac{D^2 L_b}{T^2} \int_0^1 \left( M(X) \Big|_{X=L_b x} \varphi^2(x) dx + \left[ \frac{M_c D^2}{T^2} \varphi_c^2 + \frac{D^2}{T^2 L_b^2} I_c \left( \frac{d\varphi(x)}{dx} \right)^2 \Big|_{x=1} \right] \right),$$

$$C_{eq} = 2\xi \omega_n + \frac{\gamma \rho_f \Omega_f L_c D^4}{T^2 M_{eq}} \varphi_c^2, \quad k_{eq} = \left( \frac{D^2}{L_b^3} \right) \int_0^1 I_{EZ}(X) \Big|_{X=L_b x} \left( \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \right)^2 dx, \quad (11)$$

$$\omega_n^2 = \frac{k_{eq}}{M_{eq}}, \quad \alpha = \frac{\int_0^{\frac{L_p}{L_b}} (H(x) - H(x - \frac{L_p}{L_b})) \frac{e_{31} A_p}{h_p} \frac{D}{L_b^2} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} L_b dx}{M_{eq}}, \quad F_{eq} = \frac{\rho_f U^2 C_{L0} D^2 L_c \varphi_c}{4 M_{eq}}$$

در نهایت معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت، نوسانگر وندریپول و ولتاژ خروجی لایه پیزوالکتریک بر حسب متغیرهای بی بعد شده عبارت خواهند بود از:

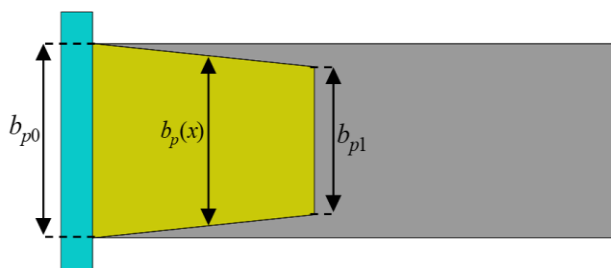
$$\frac{d^2 P(\tau)}{d\tau^2} + C_{eq} \frac{dP(\tau)}{d\tau} + \omega_n^2 P(\tau) - \alpha V(\tau) = F_{eq} q(\tau),$$

$$\frac{d^2 q(\tau)}{d\tau^2} + \eta \Omega_f (q^2(\tau) - 1) \frac{dq(\tau)}{d\tau} + \Omega_f^2 q(\tau) = G \frac{d^2 P(\tau)}{d\tau^2} \varphi_c, \quad (12)$$

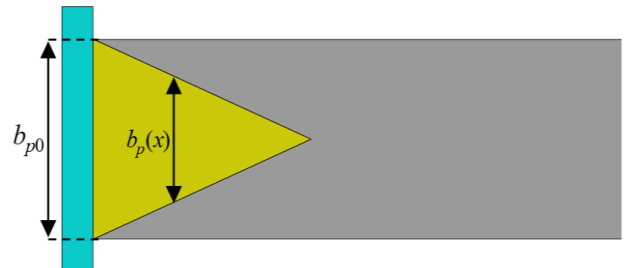
$$\frac{E_p d_{31} h_p D}{L_b T} \int_0^{\frac{L_p}{L_b}} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \cdot \frac{dP(\tau)}{d\tau} b_p(X) \Big|_{X=L_b x} dx + \frac{\varepsilon_{33} L_b}{h_p T} \frac{dV(\tau)}{d\tau} \int_0^{\frac{L_p}{L_b}} b_p(X) \Big|_{X=L_b x} dx + \frac{V(\tau)}{R} = 0$$

#### ۴- بهینه سازی شکل لایه پیزوالکتریک

در این بخش به بررسی اشکال هندسی مختلف لایه پیزوالکتریک، برای معرفی شکلی که برداشت انرژی در آن بهینه می‌شود، پرداخته شده است. جهت این امر سه شکل مختلف که عبارت از مستطیلی، دوزنقه‌ای و مثلثی می‌باشد، برای لایه‌ی پیزوالکتریک در نظر گرفته می‌شود. زمانی که لایه PZT، مستطیلی باشد، پهنای آن با پهنای تیر برابر فرض می‌شود، اما زمانی که این لایه دوزنقه‌ای یا مثلثی باشد، با فرض ضخامت ثابت، پهنای آن‌ها تابعی از طول خواهد بود. شکل (۲).



(الف)



(ب)

شکل (۲). (الف)، نمایی از لایه‌ی پیزوالکتریک دوزنقه‌ای. (ب)، نمایی از لایه پیزوالکتریک مثلثی.

همانطور که در شکل (۲)، مشاهده می‌شود، زمانی که لایه پیزوالکتریک به شکل دوزنقه‌ای باشد، پهنای آن در امتداد طول لایه، متغیر بوده و بر حسب  $x$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$b_p(x) = b_{p0} + \frac{L_b}{L_p}(b_{p1} - b_{p0})x \quad (۱۳)$$

$b_{p0}$ ، نشان دهنده پهنای اولیه یا پهنای پایه‌ی لایه پیزوالکتریک دوزنقه‌ای بوده که با پهنای تیر برابر فرض می‌شود، از طرفی  $b_{p1}$  نیز بیانگر پهنای ضلع مقابل آن است، که بسته به شیوه طراحی می‌تواند مقادیر مختلفی داشته باشد. در معادله اخیر در صورتی که  $b_{p1} = 0$  فرض شود، لایه پیزوالکتریک به شکل مثلثی خواهد بود.

## ۵- بحث و نتایج

برای استخراج نتایج از داده‌های جدول شماره ۱ استفاده شده است.

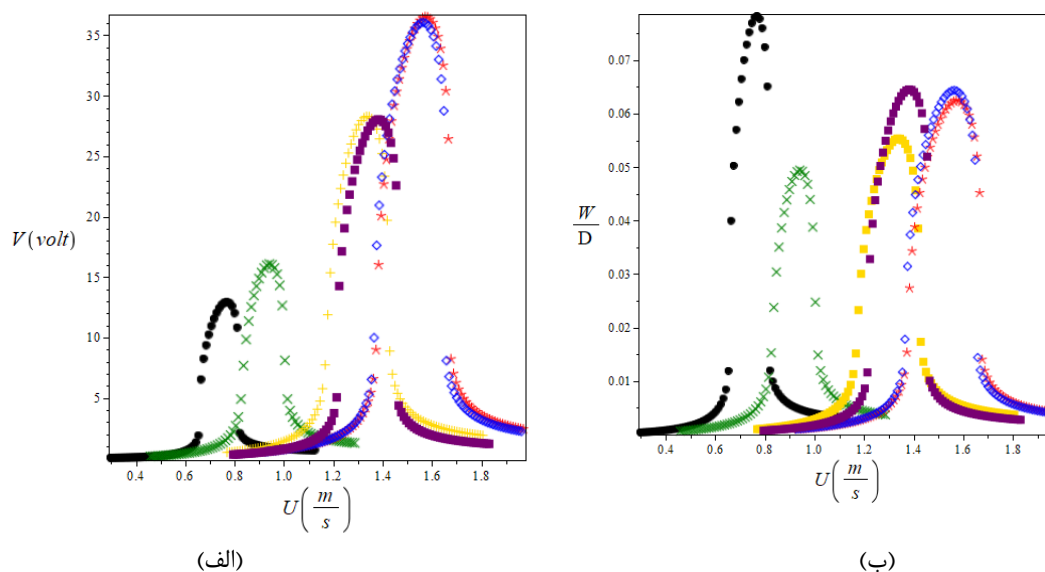
جدول ۱. پارامترهای فیزیکی و هندسی برداشت کننده

$L_b(mm)$	$L_p(mm)$	$L_c(mm)$	$b_p(mm)$	$h_b(mm)$	$h_p(mm)$
267	31.8	203	32.5	0.635	2*0.267
$S_T$	$\rho_f(\frac{kg}{m^3})$	$\rho_b(\frac{kg}{m^3})$	$\rho_p(\frac{kg}{m^3})$	$E_b(GPa)$	$E_p(GPa)$
0.2	1.2	2730	7800	73	66
$C_{L_0}$	$C_D$	$D(mm)$	$\zeta$	$\varepsilon_{33}(\frac{nF}{m})$	$M_c(g)$
0.3	1.2	2*19.8	0.005	13.28	16

جدول ۲. فرکانس‌های طبیعی اول و دوم سازه

$\omega_1(rad/s)$	$\omega_2(rad/s)$
1.7115	17.6639

شکل (۳)، تغییرات حداکثر ولتاژ برداشت شده و حداکثر دامنه‌ی ارتعاشات را بر حسب تغییرات سرعت باد برای طول‌های مختلف لایه‌ی پیزوالکتریک مستطیلی شکل نشان می‌دهد. همچنین جدول ۳ نیز، نتایج استخراج شده مربوط به گراف‌های شکل (۳) را برای حداکثر ولتاژ خروجی و حداکثر دامنه ارتعاش و سرعت‌های باد مربوطه ارائه می‌دهد.



شکل (۳). (الف)، حداکثر تغییرات ولتاژ خروجی بر حسب تغییرات سرعت باد. (ب)، حداکثر تغییرات انحراف انتهای تیر بر حسب تغییرات سرعت باد، برای لایه پیزوالکتریک مستطیلی که در آن، (نماد دایره مشکی متعلق به لایه با طول  $L_p = 31.8mm$ )، (نماد ضربدر سبز متعلق به لایه با طول  $L_p = 0.25L_b$ )، (نماد به اضافه نارنجی متعلق به لایه با طول  $L_p = 0.5L_b$ )، (نماد ستاره قرمز متعلق به لایه با طول  $L_p = 0.7L_b$ )، (نماد لوزی

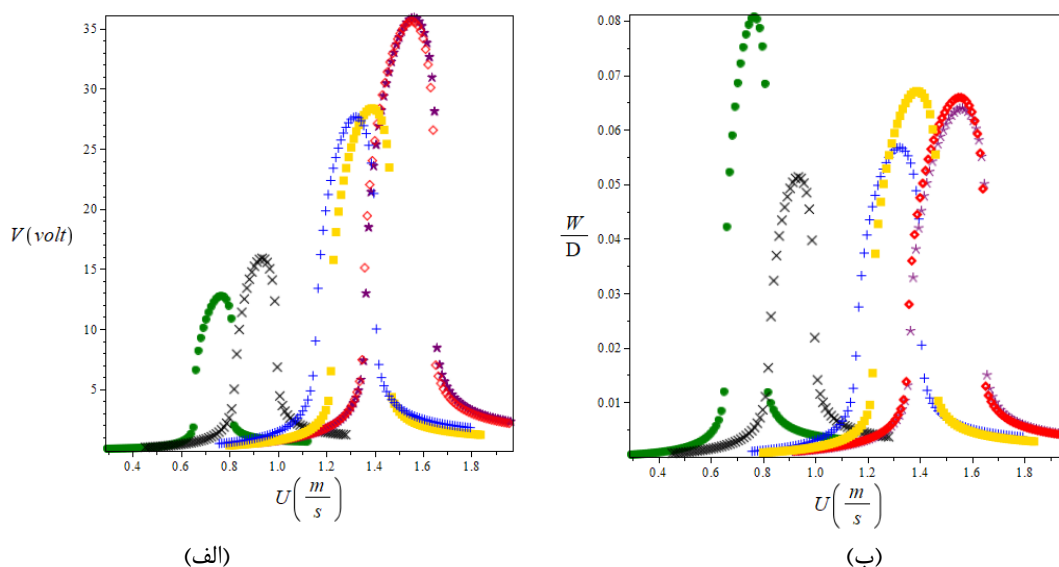
آبی متعلق به لایه با طول  $L_p = 0.75L_b$ ، (نماد مربع بنفش متعلق به لایه با طول  $L_p = L_b$ ).

جدول ۳. حداکثر ولتاژ خروجی و دامنه ارتعاشات، در طول‌های مختلف لایه پیزوالکتریک مستطیلی.

طول‌های مختلف لایه پیزوالکتریک (mm)	ولتاژ خروجی (volt)	توان خروجی (w)	سرعت باد (m/s)	دامنه ارتعاشات (mm)
$L_p = 31.8mm$	12.9295	0.00006796	0.7695	0.07824
$L_p = 0.25L_b = 66.75mm$	16.074	0.000105	0.9409	0.04944
$L_p = 0.5L_b = 133.5mm$	28.2892	0.0003253	1.3347	0.05535
$L_p = 0.7L_b = 186.9mm$	36.5429	0.0005428	1.5721	0.06251
$L_p = 0.75L_b = 200.25mm$	36.0703	0.0005289	1.5642	0.06436
$L_p = L_b = 267mm$	28.038	0.0003195	1.3812	0.06452

همانطور که در گراف‌های شکل (۳) مشاهده می‌شود، با افزایش طول لایه پیزوالکتریک، سرعت باد لازم جهت ورود به ناحیه لاکین نیز افزایش می‌یابد، اما با افزایش بیشتر طول لایه پیزوالکتریک و نزدیک‌تر شدن آن به طول کل تیر، این روند معکوس می‌شود.

این پدیده به تغییرات در فرکانس طبیعی سیستم نسبت داده می‌شود. فرکانس ریزش گردابه با معادله  $\omega f = (2\pi S_t U)/D$  تعریف می‌شود. به عبارت دیگر، سیستمی با فرکانس طبیعی بالاتر برای ورود به ناحیه قفل شونده (لاکین) به سرعت باد بیشتری نیاز دارد. این رفتار را می‌توان به این واقعیت نسبت داد که با افزایش طول لایه پیزوالکتریک، هم سختی خمشی معادل و هم جرم معادل سیستم افزایش می‌یابند. اما وقتی لایه به سمت انتهای آزاد تیر امتداد می‌یابد، به دلیل دامنه ارتعاش بالاتر در آن ناحیه، سهم جرم معادل بیشتر می‌شود، در حالی که سرعت افزایش سختی خمشی کاهش می‌یابد. در نتیجه، در تعامل بین جرم و سختی، اثر جرم غالب شده و منحنی پاسخ ولتاژ - سرعت باد در ابتدا به سمت سرعت‌های باد بالاتر تغییر می‌کند، و سپس معکوس می‌شود و به سمت سرعت‌های باد پایین‌تر بر می‌گردد. همانطور که در جدول ۳ نیز نشان داده شده است، حداکثر ولتاژ خروجی در ابتدا با افزایش طول لایه PZT افزایش می‌یابد و به مقدار اوج در ۱۸۶٫۹ میلی‌متر می‌رسد، و پس از این نقطه، شروع به کاهش می‌کند. در شکل (۴) و همچنین جدول ۴ نیز حداکثر تغییرات ولتاژ خروجی و دامنه ارتعاشات برحسب تغییرات سرعت باد برای لایه‌ی PZT دوزنقه‌ای آورده شده است.



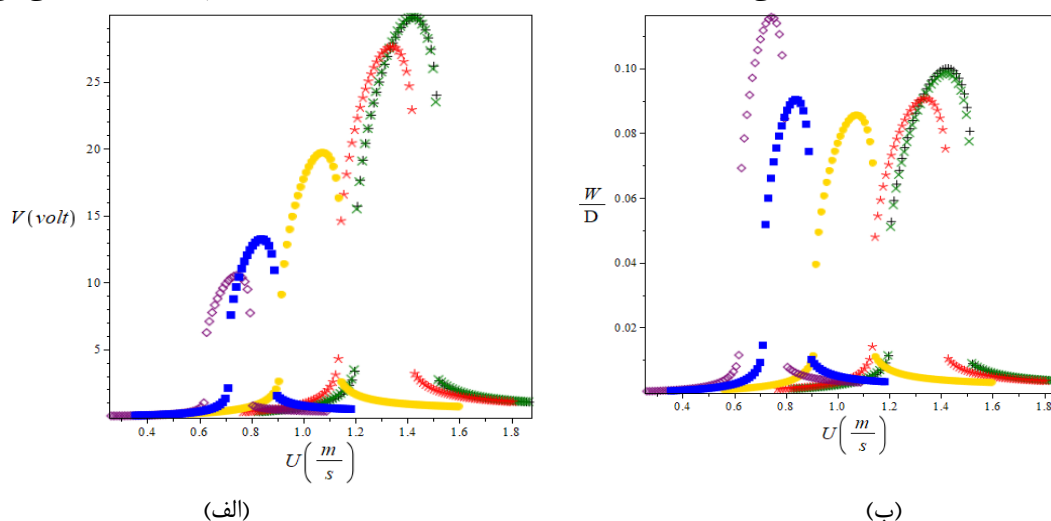
شکل (۴). (الف)، حداکثر تغییرات ولتاژ خروجی برحسب تغییرات سرعت باد. (ب)، حداکثر تغییرات انحراف انتهای تیر برحسب تغییرات سرعت باد، برای لایه پیزوالکتریک دوزنقه‌ای که در آن، (نماد دایره سبز متعلق به لایه با طول  $L_p = 31.8mm$ )، (نماد ضرب مشکی متعلق به لایه با طول  $L_p = 0.25L_b$ )، (نماد به اضافه آبی متعلق به لایه با طول  $L_p = 0.5L_b$ )، (نماد ستاره بنفش متعلق به لایه با طول  $L_p = 0.7L_b$ )، (نماد لوزی قرمز متعلق به لایه با طول  $L_p = 0.75L_b$ )، (نماد مربع طلایی متعلق به لایه با طول  $L_p = L_b$ ).

جدول ۴. حداکثر ولتاژ خروجی و دامنه ارتعاشات، در طول‌های مختلف لایه پیزوالکتریک دوزنقه‌ای.

طول‌های مختلف لایه پیزوالکتریک (mm)	ولتاژ خروجی (volt)	توان خروجی (w)	سرعت باد (m/s)	دامنه ارتعاشات (mm)
$L_p = 31.8mm$	12.7522	0.00006611	0.7674	0.08074
$L_p = 0.25L_b = 66.75mm$	15.8802	0.0001025	0.9352	0.05133
$L_p = 0.5L_b = 133.5mm$	27.6593	0.00031099	1.3236	0.05674
$L_p = 0.7L_b = 186.9mm$	35.9283	0.0005247	1.5635	0.06398
$L_p = 0.75L_b = 200.25mm$	35.6022	0.0005153	1.558	0.06592
$L_p = L_b = 267mm$	28.3544	0.0003268	1.3872	0.06706

نتایج نشان می‌دهد که روند مشاهده شده برای لایه PZT مستطیلی، با اختلاف کمی برای لایه‌ی دوزنقه‌ای نیز مشاهده می‌شود. این اختلاف ناشی از کاهش تدریجی عرض لایه دوزنقه‌ای در امتداد طول تیر است. (رابطه ۱۳).

گراف‌های بعدی تغییرات حداکثر ولتاژ خروجی و دامنه ارتعاشات برحسب تغییرات سرعت باد برای لایه پیزوالکتریک مثلثی می‌باشند.



شکل (۵). (الف)، حداکثر تغییرات ولتاژ خروجی برحسب تغییرات سرعت باد. (ب)، حداکثر تغییرات انحراف انتهای تیر برحسب تغییرات سرعت باد، برای لایه پیزوالکتریک مثلثی که در آن، (نماد دایره بنفش متعلق به لایه با طول  $L_p = 31.8mm$ )، (نماد مربع آبی متعلق به لایه با طول  $L_p = 0.25L_b$ )، (نماد دایره طلایی متعلق به لایه با طول  $L_p = 0.5L_b$ )، (نماد ستاره قرمز متعلق به لایه با طول  $L_p = 0.7L_b$ )، (نماد ضرب سبز متعلق به لایه با طول  $L_p = 0.95L_b$ )، (نماد به علاوه مشکی متعلق به لایه با طول  $L_p = L_b$ ).

جدول ۵. حداکثر ولتاژ خروجی و دامنه ارتعاشات، در طول‌های مختلف لایه پیزوالکتریک مثلثی.

طول‌های مختلف لایه پیزوالکتریک (mm)	ولتاژ خروجی (volt)	توان خروجی (w)	سرعت باد (m/s)	دامنه ارتعاشات (mm)
$L_p = 31.8mm$	10.5252	0.00004503	0.7434	0.1158
$L_p = 0.25L_b = 66.75mm$	13.2397	0.00007126	0.8364	0.09037
$L_p = 0.5L_b = 133.5mm$	19.711	0.0001579	1.0742	0.08557
$L_p = 0.75L_b = 200.25mm$	27.6458	0.0003107	1.3442	0.09076
$L_p = 0.95L_b = 253.65mm$	29.8743	0.0003628	1.4253	0.09847
$L_p = L_b = 267mm$	29.8081	0.0003612	1.4284	0.10005

طبق شکل (۵) و جدول ۵، تفاوت قابل توجهی بین لایه PZT با شکل‌های مستطیلی و دوزنقه‌ای با مثلثی وجود دارد. در هر سه هندسه لایه، شروع ناحیه لاکین با یک الگوی رفت و برگشتی مرتبط است که مستقیماً با تغییرات فرکانس طبیعی مرتبط است. با این حال، محل این تغییر رفتاری در لایه مثلثی در مقایسه با لایه مستطیلی و دوزنقه‌ای به طور قابل توجهی متفاوت است. این امر عمدتاً به این دلیل است که در پیکربندی مثلثی، افزایش طول لایه، مساحت سطح آن را در نزدیکی لبه گیردار گسترش می‌دهد، در نتیجه، سهم سختی معادل بیشتر از جرم افزوده شده غالب می‌شود و منجر به روند افزایشی کلی در فرکانس طبیعی تا تقریباً ۰٫۹۵ طول تیر

می‌شود. اگرچه شروع ناحیه لاکین را می‌توان از طریق تحلیل فرکانس طبیعی پیش‌بینی کرد، اما دامنه ارتعاش و میزان ولتاژ برداشت شده به عوامل مختلفی از جمله طول لایه، هندسه، نسبت میرایی، نیروی ناشی از کشش و موارد دیگر بستگی دارد. به دلیل این کوپلینگ پیچیده، نقطه حداکثر ولتاژ برداشت‌شده لزوماً با نقطه حداکثر دامنه ارتعاش منطبق نیست. نتایج نشان می‌دهد که بالاترین ولتاژ برداشت‌شده در حالت مستطیلی و دوزنقه‌ای در طول  $L_p = 0.7L_b$  رخ می‌دهد، در حالی که در حالت مثلثی در طول  $L_p = 0.95L_b$  رخ می‌دهد. علاوه بر این، نتایج نشان می‌دهد که ولتاژ برداشت شده در پیکربندی مستطیلی بیشتر از مقدار مشاهده شده در پیکربندی‌های مثلثی و دوزنقه‌ای است.

## ۶- نتیجه‌گیری

نتایج نشان داد که افزایش طول لایه پیزوالکتریک، تاثیر به سزایی بر افزایش میزان برداشت انرژی و همچنین گسترش پهنای ناحیه لاکین و جابجایی آن به سمت سرعت‌های باد بالاتر دارد. همچنین، نتایج نشان می‌دهد که بیشترین مقدار انرژی برداشت شده در لایه PZT مستطیلی و دوزنقه‌ای در طول ۱۸۶٫۹ میلی‌متر رخ می‌دهد، در حالی که در لایه PZT مثلثی حداکثر مقدار انرژی استخراجی در طول ۲۵۳٫۶۵ میلی‌متر اتفاق می‌افتد. از طرفی با مقایسه بین این سه پیکربندی، شکل و طول بهینه لایه پیزوالکتریک در سیستم برداشت کننده تحت بررسی، شکل مستطیلی و طول ۱۸۶٫۹ میلی‌متر می‌باشد.

## مراجع

- [1] Z. Yang, S. Zhou, J. Zu, and D. Inman, "High-performance piezoelectric energy harvesters and their applications," *Joule*, vol. 2, no. 4, pp. 642–697, Apr. 2018.
- [2] J. Wang, L. Geng, L. Ding, H. Zhu, D. Yurchenko, "The state-of-the-art review on energy harvesting from flow-induced vibrations", *Applied Energy*, 267, 114905, (2020).
- [3] C. W. Hou, X. B. Shan, L. Zhang, R. J. Song, and Z. B. Yang, "Design and modeling of a magnetic-coupling monostable piezoelectric energy harvester under vortex-induced vibration," *IEEE Access*, vol. 8, pp. 108913–108927, Jun. 2020.
- [4] M. Zamanian, B. Firouzi, "Analysis and optimal design of vibration-based Paddle type piezoelectric energy harvester under electrostatic actuation," *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, 12, 6723–6740, (2024).
- [5] M. Zamanian, L. Garibaldi, "Vortex induced vibration analysis of a cylinder mounted on a flexible rod," *Wind and Structures*, 441- 445, 29(2019).
- [6] H. L. Dai, A. Abdelkefi, L. Wang. "Piezoelectric energy harvesting from concurrent vortex-induced vibrations and base excitations", *Nonlinear Dynamics*, 77, 967-981, (2014).